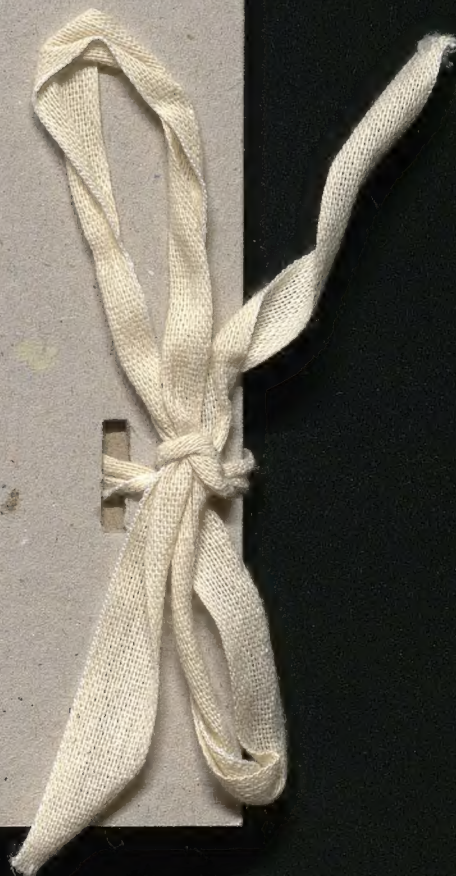


9347

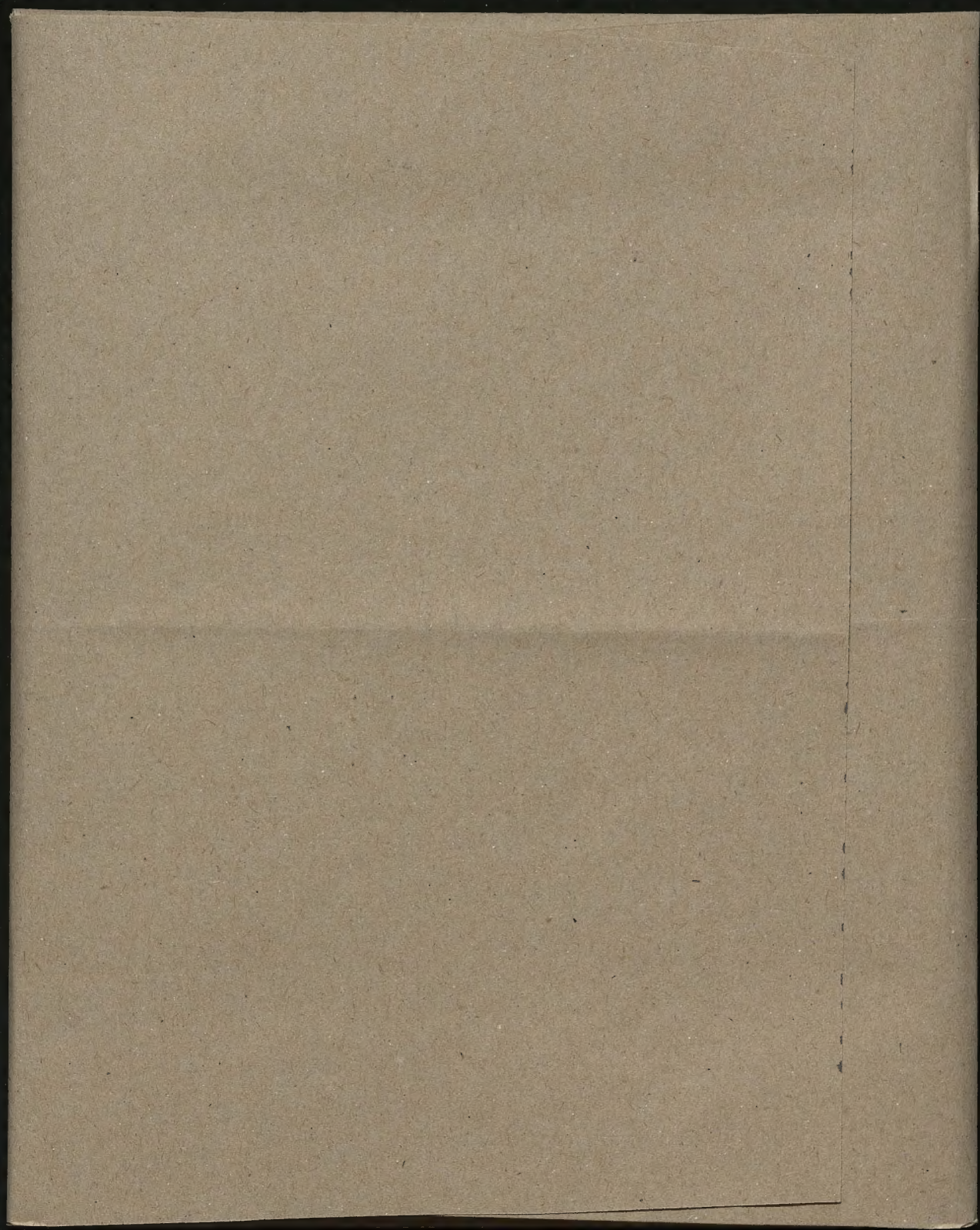
Bibl. Jap.













Insb. 114/53

1x

Sur les phénomènes de l'aérodynamique et les

leurs effets thermiques qui les accompagnent

par

M. Smoluchowski,

professeur à l'Université de L'opol (Lomb.)

[20] [rev. druck 1903. Billet. Acad. Crac. 143-183]



M. Marie Smoluchowski. O zjawiskach aerodynamicz-  
nych i towarzyszących im objawach cieplnych. (Sur les  
phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui  
les accompagnent). Mémoire présenté par M. Lad. Na-  
tanson m. t.



1  
Sur les phénomènes de ~~l'~~ aérodynamiques et leurs les  
effets thermiques qui les accompagnent.  
par

M. Smoluchowski  
professeur à l'Université de L'opol.

I. Équations fondamentales <sup>de l'</sup> aérodynamique.

§1. L'~~aérodynamique~~ est restée ~~beaucoup~~ <sup>très</sup> en arrière <sup>de</sup> ~~en comparaison~~  
avec l'~~hydrodynamique~~. qui, ~~se peut vanter~~ depuis ~~de temps~~ les  
recherches fondamentales de Stokes, <sup>de</sup> Helmholtz et <sup>de</sup> Kelvin, ~~se a~~  
~~peut vanter~~ <sup>fait des</sup> progrès énormes, grâce surtout à l'intérêt  
qu'elle a éveillé chez les savants anglais (<sup>Lord</sup> Rayleigh, <sup>MM.</sup> Lamb, Love,  
Hicks, Reynolds, Thomson etc.).

(En dehors de l'acoustique, il n'y a que fort peu de ces  
particuliers (transpiration <sup>par des tubes</sup> Poiseuille, effusion ~~par une~~ <sup>ouverture dans une</sup>  
lamme mince, disques oscillants <sup>résistance des corps projetés</sup> de Meyer, etc.) qui aient été  
traités avec quelque approximation; très vague quelque fois; mais  
pas une loi générale, pas une solution précise. ~~n'a été trouvée jusqu'à présent.~~







Les problèmes les plus importants ~~et~~ sont à peine abordés, surtout en ce qui concerne les applications à l'aérostatique et la météorologie, lesquelles par conséquent, sont plongées dans un état d'empirisme chaotique.

C'est qu'on ne peut pas, en général, <sup>comme dans les méthodes</sup> ~~d'après les méthodes~~ de l'hydrodynamique, regarder les gaz comme incompressibles et surtout que la compressibilité, déterminée par la loi des Boyle-Charles, dépend d'une nouvelle variable, de la température, dont les variations jouent un rôle aussi considérable que les différences de ~~la~~ pression.

Par conséquent, il faut ajouter, aux équations ordinaires de l'hydrodynamique, une équation déduite de la thermodynamique.

La complication du problème consiste en ce qu'il est impossible, en général, de séparer ce côté thermique de la recherche du côté mécanique.

Dans les travaux antérieurs on <sup>admettait</sup> ~~acceptait~~ un état isothermique ou adiabatique du gaz, <sup>sans justifier ces hypothèses d'une manière suffisante</sup> ~~on en exposant pas de preuve suffisante~~, ou bien, on se contentait de supposer que la réalité sera comprise entre ces limites, souvent très éloignées. \*)

\*) Nous trouvons la théorie isothermique de l'effusion par une petite ouverture dans les ouvrages de: Duhamel, Housson, Wüllner, Lang, la théorie adiabatique [d'après St Venant et Wantzel] <sup>chez: Zeuner, Wilde, Lamb; toutes les deux chez Winkelman, Chruvolson etc.</sup>







Ce n'est qu'en 1894, que la loi thermique a été précisée,  
 sur laquelle ces considérations doivent être basées, et qui,  
 par conséquent, devrait aussi servir de fondement à l'exposé  
 systématique de l'aérodynamique. Elle a été <sup>déduite</sup> ~~de la~~ <sup>i delg jik physisch</sup> [ ]  
 — Comme cette loi n'a pas été, jusqu'à aujourd'hui, <sup>appliquée à ces questions</sup> ~~exploitée~~  
~~donnée~~ <sup>\*\*) nous nous proposons, dans ce travail, suivant,</sup>  
 de <sup>présenter un essai dans cette direction.</sup> ~~donner une contribution à de telles recherches~~

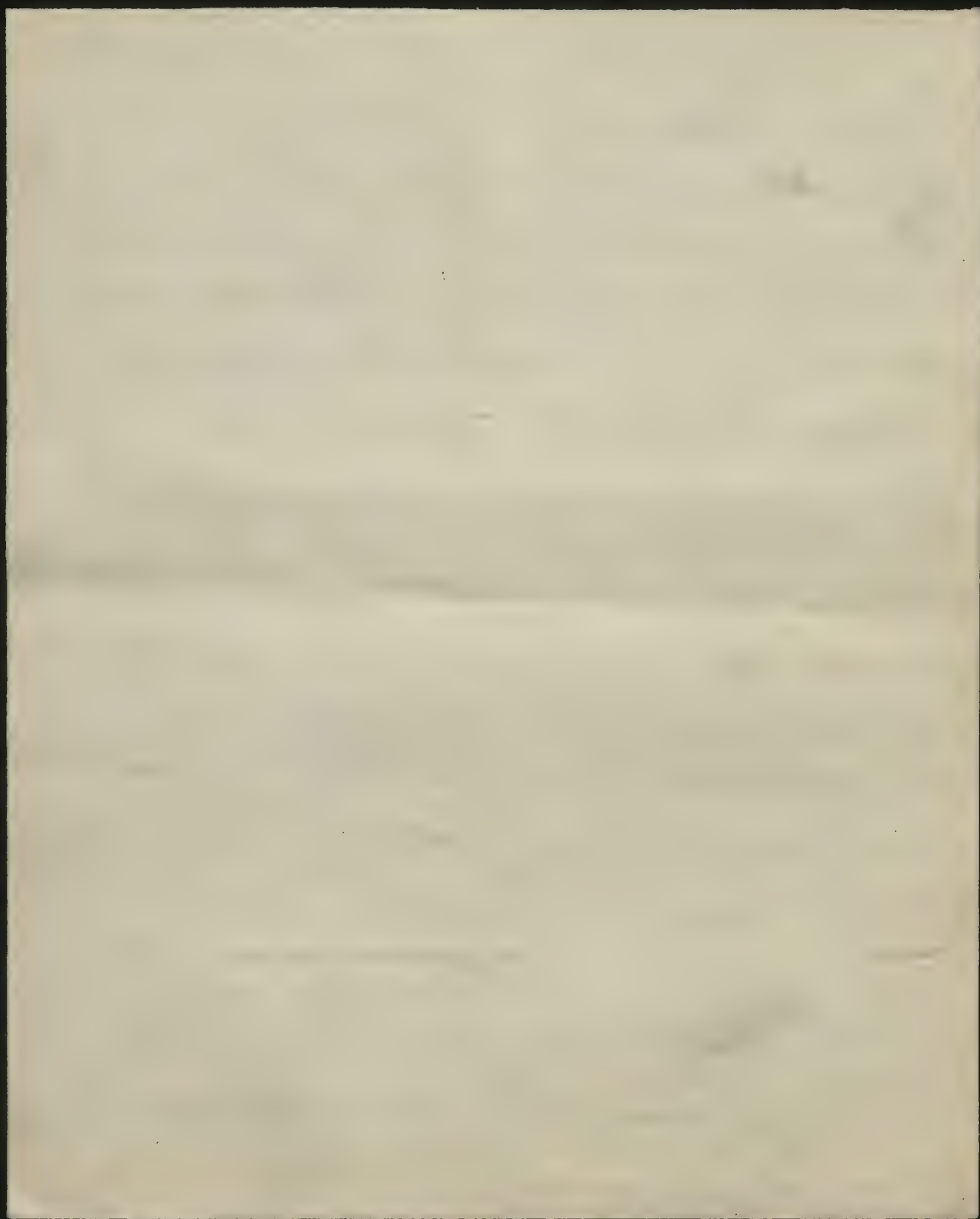
§ 2. Adoptons le procédé de Stokes <sup>qui consiste à</sup> ~~de~~ déduire les équations  
 de viscosité sans hypothèse moléculaire, en supposant seulement  
 que les forces du frottement intérieur <sup>soient</sup> ~~sont~~ proportionnelles à la ~~viscosité~~  
<sup>viscosité des déformations élémentaires.)</sup>  
~~de la viscosité.~~ Pour être exact, il y faut ajouter une correction,  
 si la température du gaz n'est pas la même partout, puisque le  
 coefficient de la viscosité en dépend. En effet, on ne saurait ~~pas~~  
 négliger cette circonstance, <sup>s'il s'agit</sup> ~~lorsqu'il s'agit~~ par exemple, des mouvements  
 de l'océan atmosphérique <sup>dans les régions supérieures duquel règne</sup> ~~ou~~ sans doute une température

~~et déduit~~ <sup>et, plus</sup> en même temps par Kirchhoff ~~pour les cas~~ d'un gaz monoatomique,  
<sup>général</sup> ~~pour les cas~~ <sup>général</sup> par ~~W. K. Thomson~~ <sup>W. K. Thomson</sup> à l'aide de considérations cinématiques <sup>ainsi que</sup>  
 et par ~~W. K. Thomson~~ <sup>W. K. Thomson</sup> à l'aide de la thermodynamique <sup>voir Thomson, Bulletin</sup>  
 Intern. de l'Acad. de Cracovie 1902 p. 144.

\*\*) Nous en avons <sup>donné</sup> fait une application dans <sup>notre</sup> étude "Sur l'atmosphère ~~de la~~ de la  
 terre et des planètes", voir Physik. Zeitschr. 2 p. 307 (1901).

\*\*\*) D'après Lamb, Hydrodynamics p. 509







extrêmement basse dans les régions supérieures. \*)

Dans ce cas, le ~~résultat de~~ la substitution des équations bien connues ~~de~~

$$p_{xx} = -p + \frac{2\mu}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{etc.} \quad (1)$$

$$\text{dans } \rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \quad (2)$$

serait donnerait

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x} \left[ \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial u}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial u}{\partial z} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad \text{etc.} \quad (3)$$

Mais dans les applications ordinaires, les différences des températures n'étant pas grandes, on peut négliger les termes de la ligne seconde, ce que en général nous ferons aussi.

Dans ces équations,  $p$  représente la moyenne arithmétique des trois tensions perpendiculaires :

$$p = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \quad (4)$$

Il n'en résulte pas que  $p$  soit identique ~~avec~~ la pression qui figure <sup>l'expression de</sup> dans la loi de Boyle-Charles, ce qui est, néanmoins, une

hypothèse bien probable, admise presque par tous les auteurs

récents. \*\*) La même supposition peut être énoncée sous une

autre forme : si nous avons considéré la loi Boyle-Charles

\*) Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc.“ loc. cit

\*\*) Voir Notanson : Bulletin de l'Acad. d. Sc. de Cracovie 1901 p. 95



1) Voir à ce sujet Natanson, Bulletin Internat. de l'Académie de Cracovie, année 1901, pp. 108-110.



au lieu de l'équation (4) comme définition de  $p$ , nous serions parvenus à l'équation

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + \nu \frac{\partial \text{div}}{\partial x} \quad (5)$$

[ici le symbole div est une abréviation pour  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ]

Et nous devrions formuler l'hypothèse de Stokes ~~écrite~~ <sup>de la manière suivante</sup> le coefficient de viscosité  $\nu$  pour les changements de volume est le tiers ~~troisième partie~~ du coefficient  $\mu$  pour les changements de forme.

C'est ce que nous admettrons aussi, en égard à la théorie cinétique, qui d'après Maxwell <sup>\*)</sup> fournit le même résultat;

mais nous insistons sur l'importance d'une vérification expérimentale de cette relation, et nous ~~ne croyons pas~~ <sup>ne croyons pas</sup> ~~se fonder sur tout~~ <sup>ce soit</sup> l'opinion de Meyer <sup>avec M. G. Meyer</sup> qui ~~est~~ <sup>est</sup> une question indifférente, ~~quoique~~ <sup>parce que</sup> la viscosité de volume se superpose ~~à~~ <sup>à</sup> la pression et n'en peut pas être distinguée. On verra plus loin des exemples qui ~~mon~~ <sup>dans</sup> ~~trouvent~~ <sup>dans</sup> la fausseté (§ 24, § 25); ~~on y~~ <sup>de cette opinion</sup> pourrait encore

ajouter l'extinction des ondes sonores par suite de viscosité, à laquelle ~~contribue~~ <sup>contribue</sup> aussi cette "viscosité de volume".

§ 3. La méthode la plus simple ~~de~~ <sup>de</sup> déduire l'équation | pour

thermique fondamentale consiste dans l'application du principe de <sup>la conservation de</sup> l'énergie à un ~~un~~ <sup>un</sup> élément de ~~volume~~ <sup>masse</sup>,  $dm = \rho dx dy dz$ , se déplaçant dans le gaz. — W.D.C.

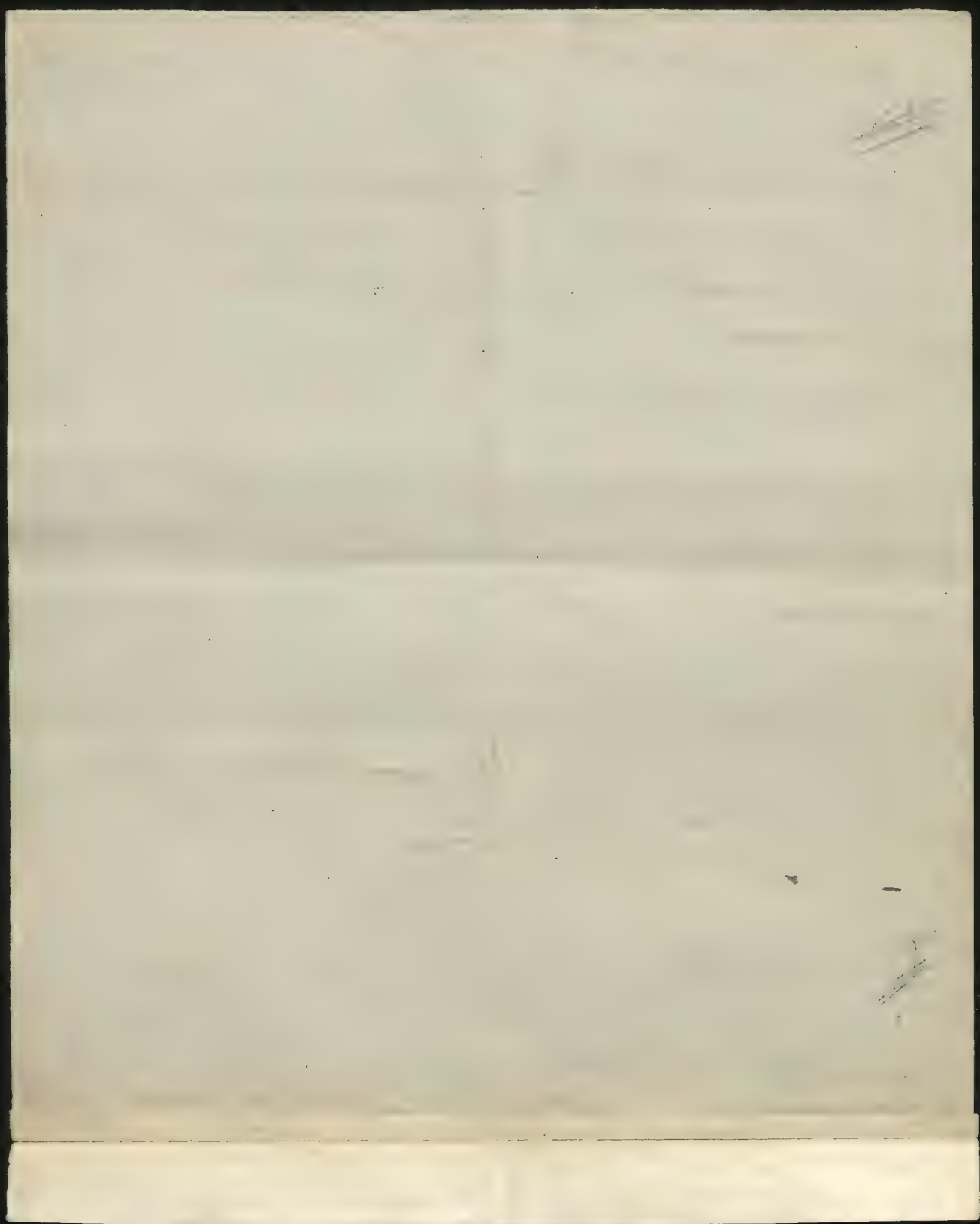
\*) Scientific Papers II. p. 69 (1890)

\*\*) Gastheorie p.

Crelle Journal 75 p. 337 (1873). (Meyer trouve  $\nu =$

en s'appuyant sur les principes de théorie cinétique des gaz (d'après Maxwell-Clausius), mais ce résultat est ~~erroné~~ <sup>erroné</sup>. Voir Boltzmann Gastheorie I p. 93 (1895)

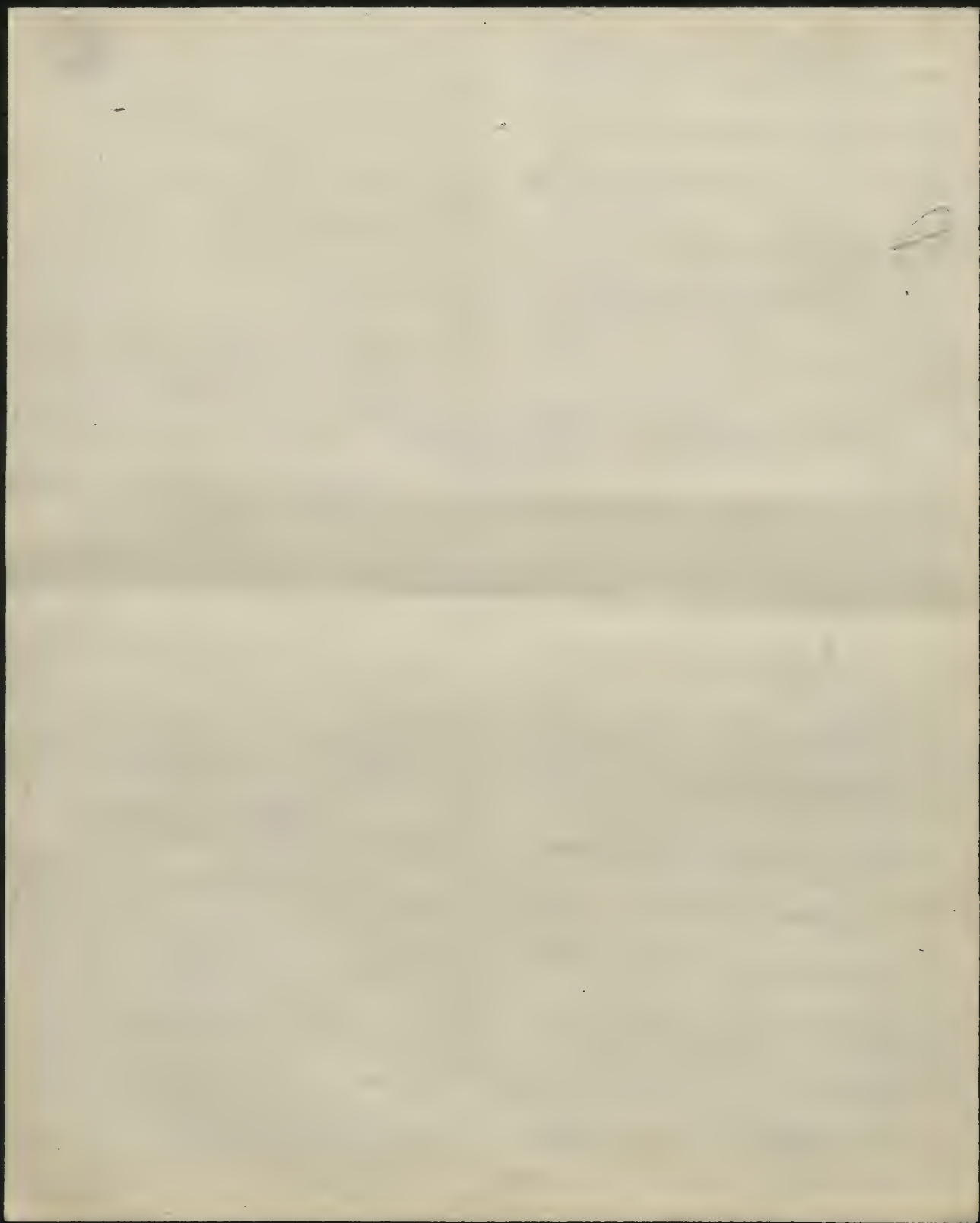














La même équation

§4. Il faut remarquer, cependant, que <sup>cette équation</sup> ~~celle~~ ne sera <sup>rigoureusement</sup> ~~pas exacte~~, ~~non~~  
~~doute, en toute rigueur~~, <sup>pas plus</sup> ~~de même~~ que les équations (3), puisqu'on  
 ne peut pas supposer que le frottement intérieur et la conductibilité  
 de <sup>la</sup> ~~leur~~ soient des phénomènes tout-à-fait indépendants. —

On ~~ne peut pas~~ <sup>pourrait</sup> même douter, qu'il y ait <sup>(en général)</sup> des phénomènes  
 quelconques, simultanés et coexistants, qui soient rigoureusement  
 indépendants. L'un de l'autre

(Dans <sup>notre</sup> ces, <sup>(M.)</sup> Notanson\*) a démontré, en effet, que la théorie moléculaire  
 cinématique fournit, pour les phénomènes de conductibilité dans  
 un gaz (en repos ou en mouvement) des expressions différentes; <sup>suivant que</sup> ~~ce gaz est~~  
 mais en général, la différence sera très petite, et il sera difficile,  
 probablement, d'en démontrer l'existence par ~~la~~ voie expérimentale. —

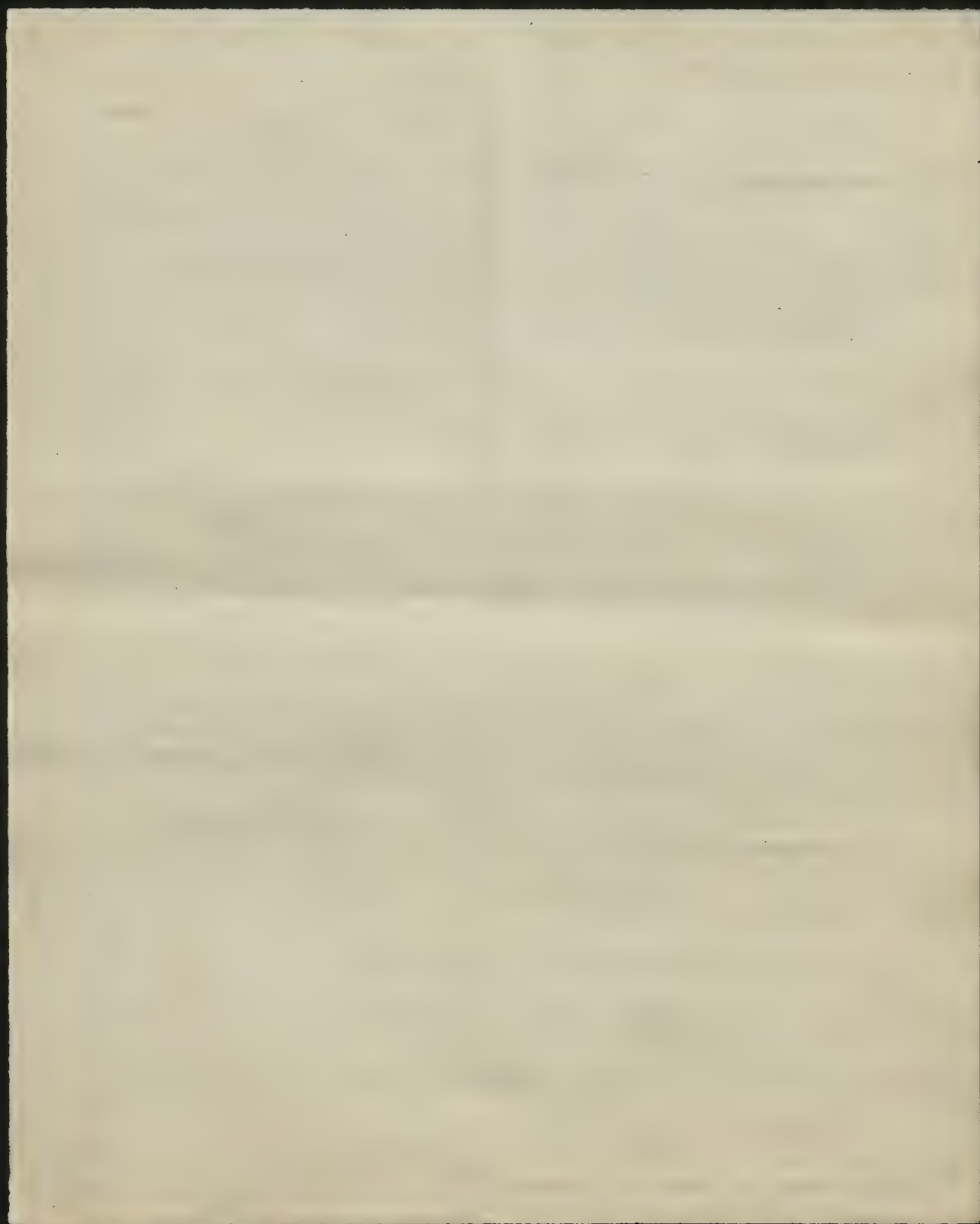
~~Donc~~, nous nous bornerons <sup>dans</sup> au degré d'exactitude <sup>auquel</sup> ~~permet~~  
 d'attendre <sup>de la</sup> l'hypothèse de "l'indépendance" ou "superposition"  
 des phénomènes de viscosité et conductibilité, ~~et nous n'entreons~~  
~~pas dans la discussion des dites questions.~~

(De même, nous omettons la considération des écarts de la loi  
 de Boyle Charles, en supposant ~~la~~ l'exactitude de la formule  

$$\frac{p}{p_0} = R\theta \quad \dots \dots \dots (9)$$

\*) Bulletin internat. de l'Acad. d. Sc. Cracovie 1902. p







§ 5. En somme, les équations fondamentales <sup>(de l'aérodynamique)</sup> servent, outre la formule citée, 9, les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}}{\partial x} + \mu \Delta^2 u \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}}{\partial y} + \mu \Delta^2 v \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}}{\partial z} + \mu \Delta^2 w \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

l'équation de continuité :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \dots \dots (11)$

et l'équation thermique, 7, qui peut être écrite, en considérant la relation  $\frac{c}{A} = \frac{R}{k-1}$  <sup>ainsi que</sup> (9) et (10), sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + k p \text{div} = (k-1) [\Phi + \kappa \Delta^2 \theta] \dots \dots \dots (12)$$

où  $\Phi$  désigne l'expression (8).

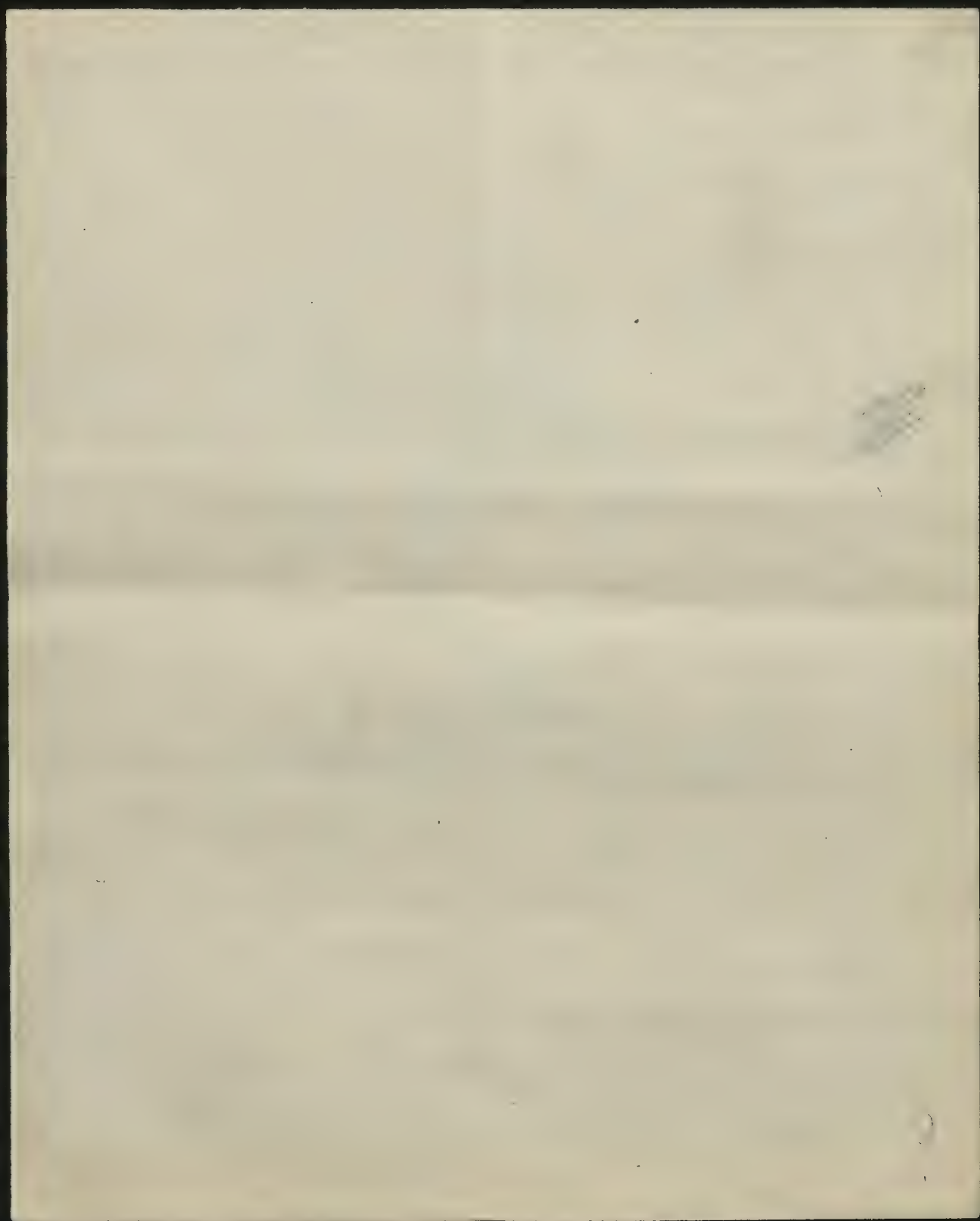
On remarque que cette équation, jointe à <sup>(11)</sup> (11) donne la formule ordinaire de la détente adiabatique :

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k$$

lorsque les termes ~~de droite~~ sont négligeables en comparaison avec ceux de gauche. Ceux-ci, en effet, représentent la réaction thermique de compression ou dilatation adiabatique.

Pour définir des problèmes spéciaux, il faut préciser les conditions pour  $u, v, w, p, \theta$  à la surface, et, pour un système variable avec le temps, l'état primitif. Dans la plupart <sup>des</sup> applications, le gaz







est contenu dans des parois solides, <sup>et dans la</sup> température <sup>est</sup> approximativement constante. <sup>sur ces parois</sup>  $u, v, w$  doivent être supposés nuls, conformément aux expériences, qui ont démontré ~~une~~ adhésion complète des couches superficielles.

(Dans le cas d'un mouvement stationnaire, l'équation (11) donne:

$\text{div} = 0$  pour les surfaces, d'où résulte, la direction normale  $z$  étant prise ~~comme~~ <sup>pour</sup> ~~axe~~ <sup>des</sup>  $Z$  et la vitesse normale étant désignée

par  $v_n$ :  $\frac{\partial v_n}{\partial t} = 0$ ; \* c'est-à-dire que la direction des lignes de flux dans les couches superficielles est parallèle à la surface.

— En désignant la vitesse dans cette direction par  $V$ , on trouve que l'équation (12) se réduit à la surface à

$$\Phi = \mu \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 = -\kappa \Delta^2 \theta \quad \dots (13)$$

— Très des parois, par conséquent, l'effet thermique de compression ou <sup>de</sup> dilatation disparaît, tandis que la production de chaleur par frottement, balancée par la dissipation en vertu de <sup>la</sup> conductibilité, y joue le rôle principal.

Dans un <sup>(pour lequel)</sup> ~~cas~~ le coefficient de conductibilité ~~thermique~~  $\kappa$  serait <sup>égal à</sup> zéro, un mouvement stationnaire serait impossible, puis que les couches superficielles se réchaufferaient sans cesse.

Cela suffit pour démontrer ~~qu'il est impossible~~, <sup>il est impossible</sup>, on n'est pas en droit ~~qu'on se soit pas justifié~~ en général, de

\*) Des différences de température entre des parties diverses des parois produiraient des courants de convection. Voir: Oberbeck [Wiedem. Ann. 7 p. 271 (1876)], Lorenz [Wied. Ann. 13 p. 582 (1881)]



23

*[Handwritten signature]*

2



traiter la viscosité et la conductibilité comme facteurs secondaires.

10

## II Théorèmes généraux sur la symétrie et la similitude dynamiques.

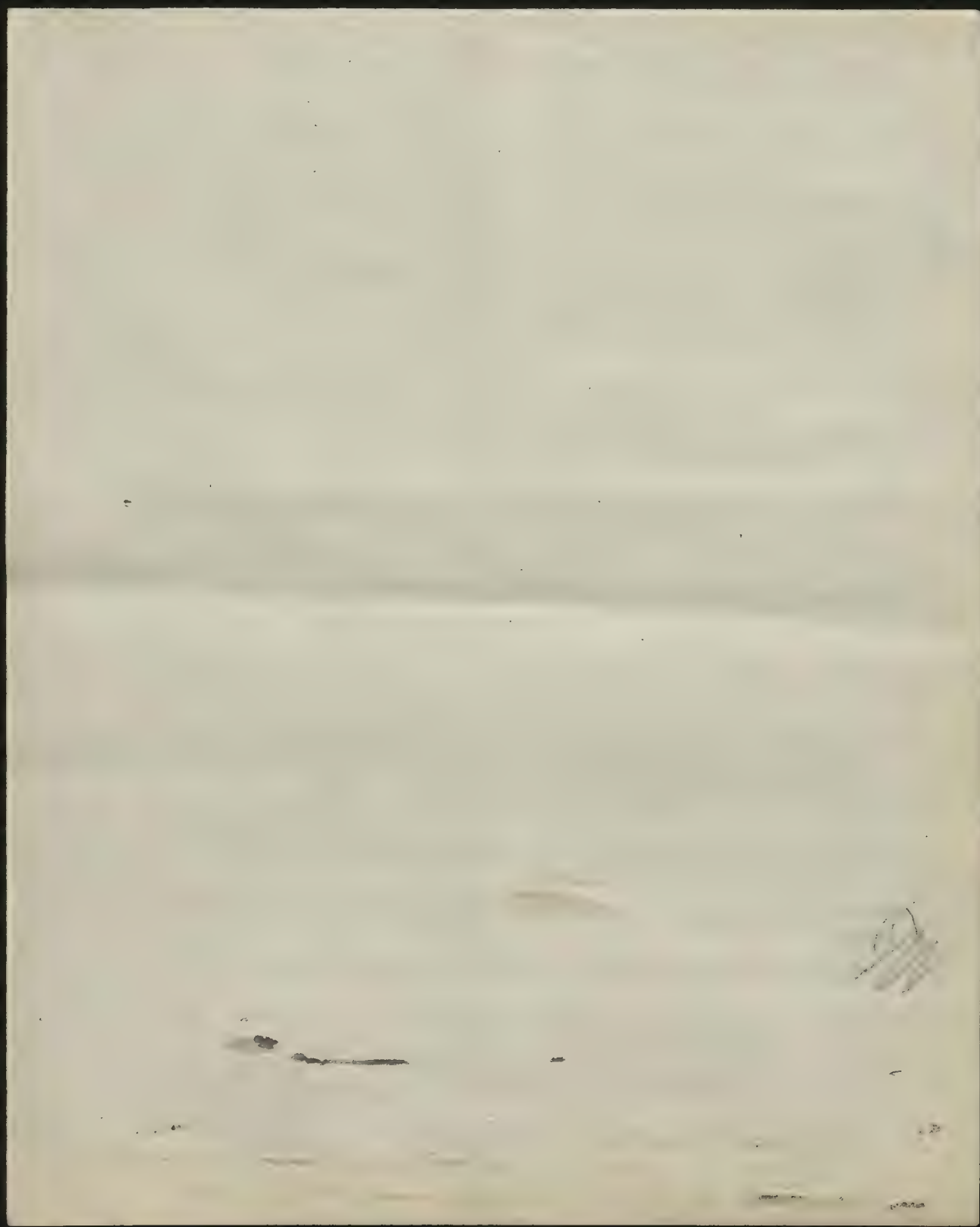
§6. Supposons les forces extérieures égales à zéro. *Alors* nous remarquerons que les équations de l'hydrodynamique ordinaire ne seront pas changées par la substitution de  $-u, -v, -w, a-p$ , au lieu de  $u, v, w, p$ , pourvu qu'il s'agisse d'un mouvement "calme" <sup>ou "lent"</sup> c'est-à-dire qu'on puisse négliger les termes du second ordre par rapport aux et à leurs dérivées partielles ~~des vitesses~~, ce qui permet de remplacer  $\frac{D}{Dt}$  par  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

<sup>Cela</sup> ~~serait~~ dire que les mouvements "calmes" des fluides sont ce qu'on pourrait appeler <sup>renversables</sup> "inversables": en changeant le signe de toutes <sup>les</sup> différences de pression, on obtient un mouvement analogue, caractérisé par les mêmes lignes de flux et la même vitesse, mais en sens inverse.

<sup>Le</sup> ~~ce~~ mouvement <sup>inerte</sup> ~~est~~, et objet de l'hydrodynamique <sup>classique</sup> ~~est~~ de l'omission contraire, est <sup>renversable</sup> ~~est~~, s'il est stationnaire, mais sans inversion de pression, puisque celle-ci dépend alors du carré de la vitesse.

Les équations complètes (ou contraire) qui tiennent compte de la

<sup>\*)</sup> Le terme nous paraît plus ~~correct~~ juste que "lent", puisque ~~ce~~ des mouvements très <sup>rapides</sup> ~~lents~~ <sup>appartiennent aussi</sup> à cette catégorie, pourvu que la densité soit ~~assez~~ <sup>assez</sup> petite.







1870-1871



Dans l'hydrodynamique ~~ordinaire~~, la valeur absolue de la pression entre aussi dans le calcul des équations (9) et (12), qui par conséquent, ne peuvent pas être ~~invariantes~~. Ici l'asymétrie est un phénomène très général; mentionnons le jet <sup>de gaz</sup> se formant, si celui-ci s'écoule sous forte pression<sup>\*)</sup>, la formation des tourbillons annulaires de fumée (d'après la méthode de Sait, les mouvements asymétriques et tourbillons autour d'un corps projeté (Rach).

(Seulement pour des mouvements très calmes, avec <sup>des</sup> différences de pression très petites, qu'il y aura <sup>(des cas de)</sup> une symétrie approximative ~~ou~~ (voir par exemple § 28).

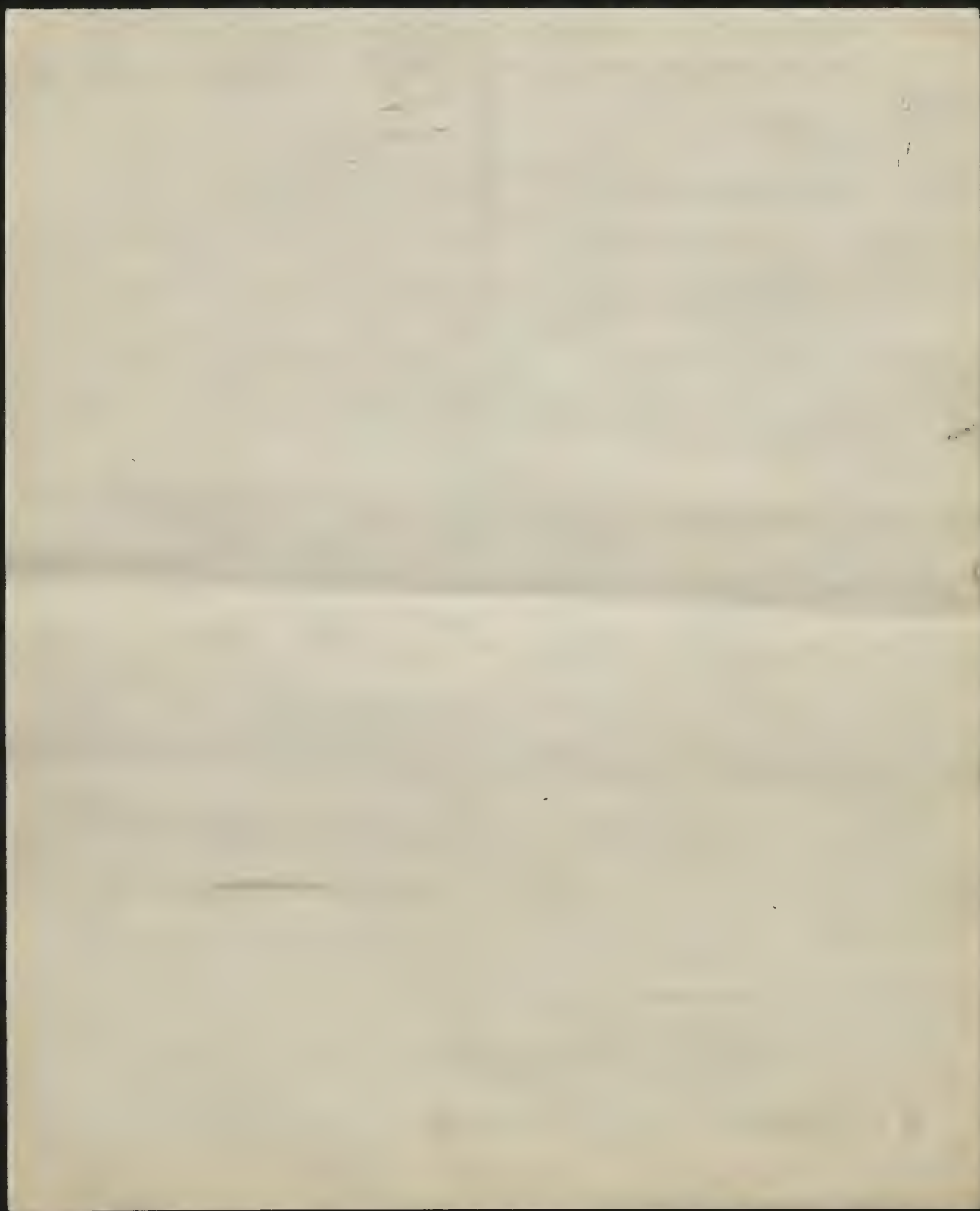
§ 7. Un principe qui est très fertile en applications diverses, est le principe de la similitude dynamique, employé par exemple par Helmholtz<sup>\*\*)</sup> dans l'hydrodynamique ordinaire:

[Après avoir <sup>achevé</sup> l'étude <sup>présente</sup> j'ai remarqué que Helmholtz, dans un <sup>second</sup> ~~autre~~ travail, avait étendu ses recherches ~~autres~~ pour y comprendre l'aérodynamique et les applications à la navigation aérienne. Mais ~~les~~ <sup>dont il se sert</sup> le raisonnement y ~~contient~~ donne lieu à quelques objections fondamentales, qui rendent plus que

\*) Voir § 9, 5.

\*\*) Berl. Akad. Ber. 1873 p. 501; Ges. Abhandl. I p. 158

\*\*) Nied. Annalen VII p. 375 (1879)





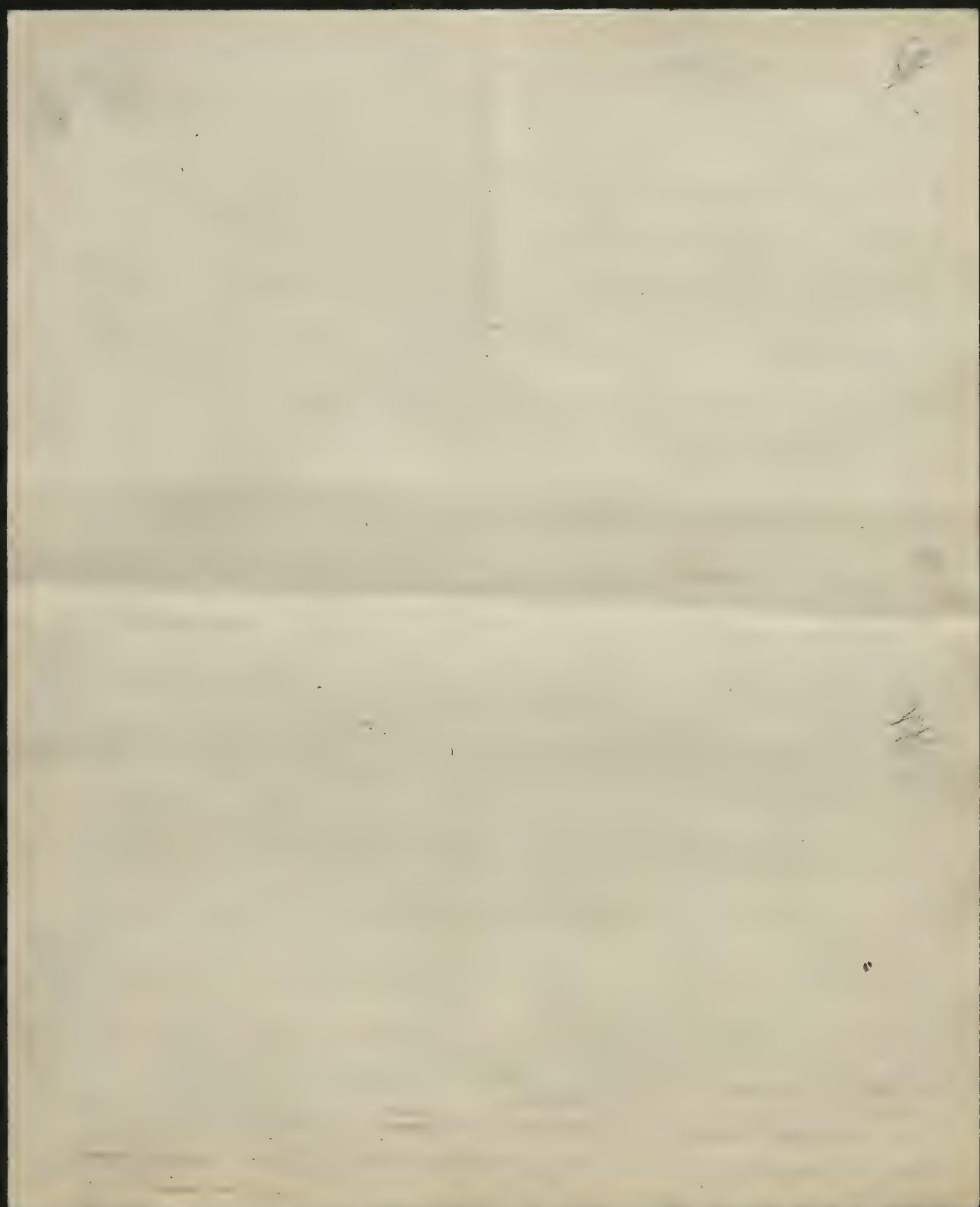
doutuses ~~les~~ conclusions définitives. <sup>le rapport des</sup>

(En dehors d'une erreur numérique [~~les~~ <sup>n'est pas</sup> coefficients de viscosité  $\frac{\mu}{\rho}$  pour l'air et l'eau ~~ne sont pas en raison de~~ 3.8082 mais de 8.082] qui change complètement les résultats quantitatifs, nous mentionnons ~~quatre~~ trois points importants : 1). l'omission complète de l'influence de la température dans les équations fondamentales 2). la compressibilité de l'air <sup>est</sup> ~~est~~ <sup>négligée</sup> dans le cas d'un ballon ~~élastique~~ <sup>élastique</sup> se mouvant avec une vitesse de 9  $\frac{m}{sec}$  3). la viscosité ~~qui~~ est négligée dans le même cas et dans le cas analogue d'un ~~navire~~ <sup>bateau</sup> dans l'eau. L'importance du point dernier est mise en évidence par le résultat bien connu qu'une sphère animée d'une vitesse constante ne subirait point de résistance dans un liquide sans viscosité)

(Je crois que l'on ne peut pas étendre la notion de "similitude" à de cas <sup>autres</sup> ~~et~~ différents que ces deux-là. Ce terme sera employé dans ce qui suit d'une façon différente, au sens strict du terme.)

Lors qu'on connaît la solution d'un problème donné, on peut se demander si les mêmes équations ne peuvent pas être satisfaites par d'autres valeurs en substituant

\*) Une partie considérable de la résistance d'un ~~navire~~ <sup>bateau</sup> provient de la formation des ondes, qui dépendent évidemment de la gravité; sous ce rapport il n'y a aucune analogie avec un ballon.







¶ si l'on n'adopte point ces hypothèses simpli-  
ficatrices !

11/12/11



que pour des amplitudes très petites, <sup>et comporte</sup> avec l'omission des effets de viscosité <sup>15</sup>  
 et de conductibilité; ~~on aura~~ on aura une formule compliquée, dans  
 laquelle entrera aussi la pression. ~~Tout de même~~ Notre conclusion  
 restera <sup>pourtant</sup> exacte, pourvu qu'on la rapporte à des sons, dont le nombre  
 des vibrations <sup>est</sup> proportionnel à  $\sqrt{\theta}$  et pourvu qu'on mesure la vitesse <sup>pour</sup>  
<sup>des</sup> pressions <sup>correspondantes</sup> ~~proportionnelles à~~  $\left[ \theta^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} \right]$  dans le cas général. Elle  
 s'applique aussi à la propagation dans des tuyaux étroits.

f). La <sup>(diminution exp.)</sup> résistance qu'éprouve un corps se mouvant avec une <sup>petite</sup> vitesse  
~~petite~~, est à peu près proportionnelle à celle-ci. Ceci est exact <sup>pour des vitesses quelconques</sup>  
 si la <sup>pression</sup> ~~densité~~ <sup>relative</sup> ~~diminue~~ <sup>de la vitesse</sup> ~~simultanément~~ en raison ~~inverse~~ et la  
 température ~~diminue~~ <sup>dans une proportion quadratique</sup> en raison du carré de la vitesse.

g). Applications semblables à l'efflux des gazs écoulement des gazs.

§9. <sup>Pour</sup> ~~Mettons~~  $h=1$ ; par conséquent  $m=1$ ,  $b=\frac{1}{n}$ : la température  
 reste invariable; la vitesse <sup>(aussi sera)</sup> la même dans deux <sup>vaisseaux</sup> ~~vaisseaux~~  
 semblables, dont les dimensions sont en raison inverse des  
 pressions du gaz.

d). En effet, <sup>il est facile de voir</sup> ~~on voit facilement~~ que la formule approximative  
 de Kirchhoff pour la vitesse du son dans des tuyaux étroits (rayon  $r$ ):

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \left[ 1 - \frac{r}{2\pi\sqrt{\pi N}} \right]; \quad \text{où } \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + \sqrt{\frac{k}{\rho}} \left[ \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right];$$

satisfait à cette proposition, (en considérant que  $N$  doit être chargé <sup>n/</sup>

Γ applicable que dans le cas du

⌈ jusqu'à présent,  
⌋ a expliquer ce phénomène.





F énoncée par ce savant



(En effet) Une loi <sup>semblable</sup> ~~partielle~~ a été établie par Tronchel <sup>\*)</sup> par ses dans ses recherches sur les sons qui accompagnent le mouvement <sup>rapide</sup> d'un cylindre (tube de verre, fil métallique etc.) dans l'air; ~~mais cette~~ la loi <sup>empirique</sup> ~~est plus~~ <sup>détailée</sup> ~~exacte~~ parce qu'elle prétend que: le nombre des vibrations dans l'air <sup>à la</sup> pression atmosphérique est ~~proportionnel~~ proportionnel à la vitesse, divisée par le rayon du cylindre:

$$N = c \frac{v}{r}.$$

Nous en concluons <sup>par</sup> notre méthode, que

cette formule entraîne ~~et la conclusion que~~ ~~l'indépendance de~~ la hauteur du son est indépendante de la pression et de la température. Tronchel, au contraire,

prétend qu'un abaissement de la température produit une

élévation du son, mais <sup>l'examen</sup> des nombres correspondants aux températures de 9.5°C et de 17°C ~~ne paraît pas devoir être favorable à cette opinion~~ <sup>ne paraît pas devoir être favorable à cette opinion</sup> ~~prétend un appui très douteux.~~

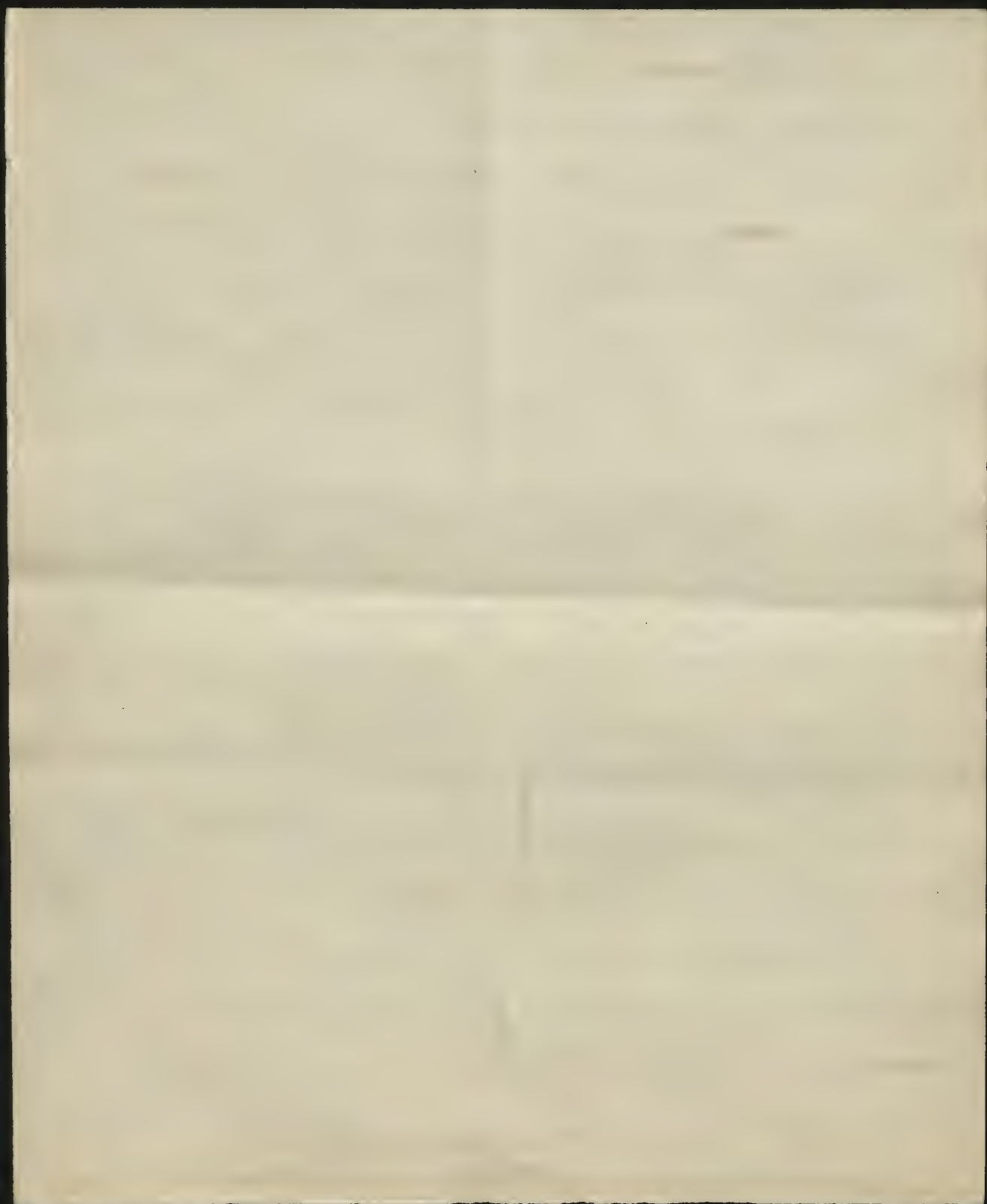
La formule <sup>citée</sup> ~~montrée~~ (d'ailleurs <sup>une relation</sup> n'est qu'approximative)

5). Saint Venant et Wantzel <sup>\*\*)</sup> ont observé que la vitesse d'un <sup>qui</sup> gaz s'écoulant par un orifice ne peut ~~pas~~ être augmentée par l'élévation de la pression, que jusqu'à une certaine limite, qui ne dépend pas de la différence des pressions, intérieure <sup>et</sup> extérieure, mais de leur rapport  $\frac{p_1}{p_2}$ . Ceci posé, imaginons

\*) Wiedem. Ann. 5 p. 216 (1878).

\*\*) Journal de l'École polytechnique XL (1839), Comptes Rendus 17 (1843).

Les observations ont été confirmées par Zimmer, <sup>Helm</sup> Wilde, Salcher et Whitehead etc.





présentées avec des  
deux expériences (avec le même orifice, mais pressions différentes,  
où cette valeur critique a été atteinte : (1)  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{P_2}{P_1}$  (2).

Le mouvement caractérisé par  $p_2/p_1$  sera semblable au cas (3),  
où les pressions sont  $P_2, P_1$  et où les dimensions de l'orifice  
ont été diminuées en raison de  $\frac{p_2}{P_2} = \frac{p_1}{P_1}$ . Puisque la vitesse  
ne change pas, la comparaison avec la deuxième expérience nous  
apprend que la vitesse sera indépendante des dimensions de l'orifice.\*)

Cette conclusion, qui est la conséquence de l'existence d'un rapport  
critique  $\frac{p_2}{p_1} = 1.89$ , s'accorde avec les résultats des expériences.

Mach et Lohsch\*\*\*) et Emden\*\*\*\*) ont remarqué la formation  
de cannelures dans le jet d'un gaz qui s'écoule, aussitôt que le  
rapport des pressions dépasse la valeur critique. Emden  
explique ce phénomène par des changements de densité correspondants  
à un train d'ondes sonores fixes. La mesure des distances  
des cannelures lui a suggéré la formule empirique

$$\lambda = 0.88 d \sqrt{\frac{p_2}{p_1} - 1.9}$$

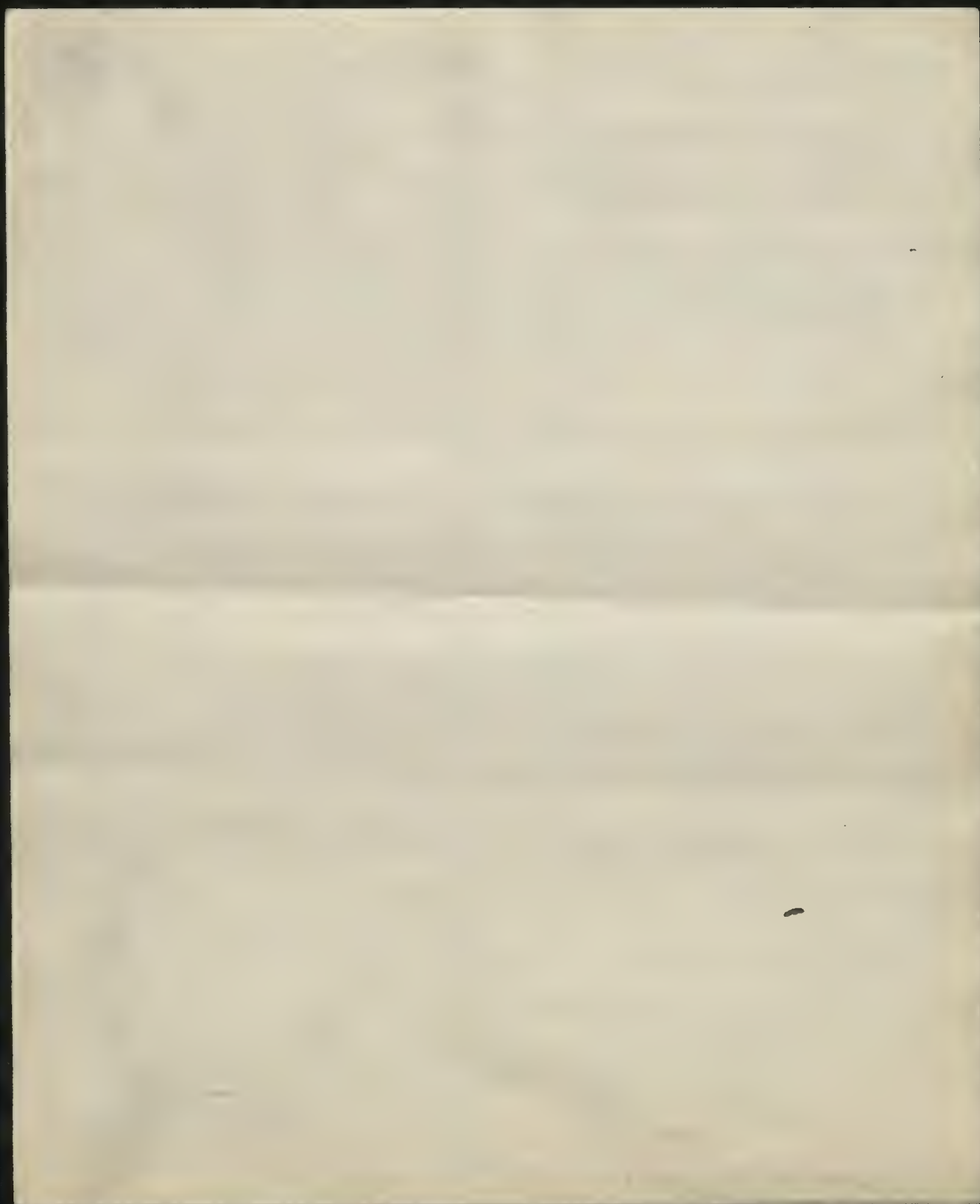
où  $d$  est le diamètre de l'orifice,  $p_1, p_2$  les pressions

Abstraction faite de ce résultat, on sait que dans un autre cas semblable,

\*) Égale approximativement à la vitesse du son (voir Lamb, Hydrodynamies p. 28)

\*\*) Sitzungsber. d. Wien. Akad. 98 (1889), Wiedem. Ann. 42 p. 144 (1890)

\*\*\*) Wiedem. Ann. 69 p. 264, 426, 453 (1899).





où les valeurs correspondantes sont  $D$ ,  $p_1 \frac{d}{D}$ ,  $p_2 \frac{d}{D}$ , la longueur  $\lambda$  changera en  $\lambda \frac{D}{d}$ . On ne saurait ~~pas~~ déterminer  $\lambda$  à priori dans un cas troisième, où ~~on aurait~~ les valeurs  $D$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , satisfaisant à la relation  $\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1 \frac{d}{D}}{p_2 \frac{d}{D}} = \frac{p_1}{p_2}$

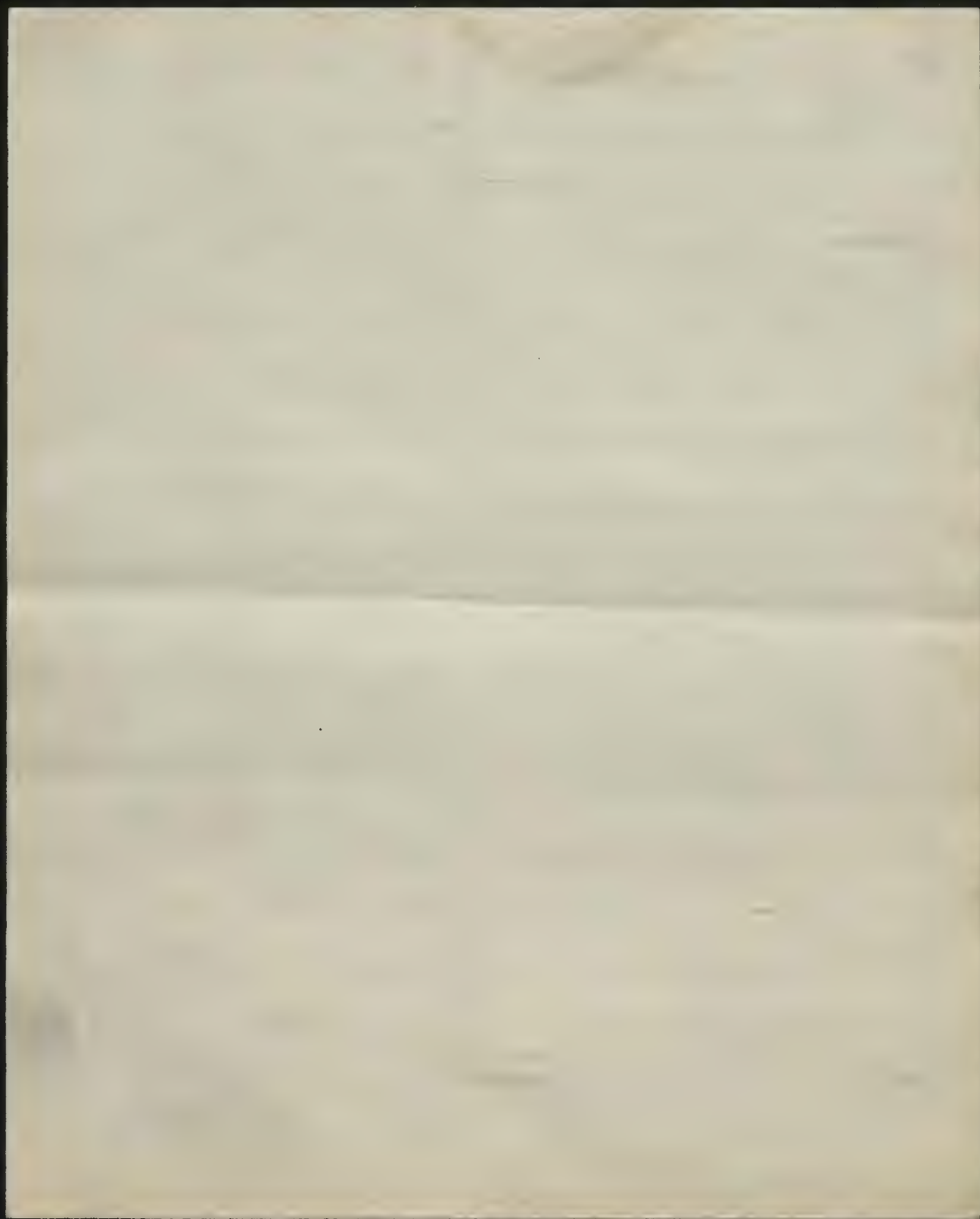
mais si d'on a établi le fait que  $\lambda$  ne dépend pas des valeurs absolues des ~~des~~ pressions <sup>mais</sup>, seulement de leur rapport, on sait que cette grandeur conserve la valeur  $\lambda \frac{D}{d}$ . C'est-à-dire qu'on aura établi la proportionnalité de  $\lambda$  avec les dimensions de l'orifice en général:  $\lambda = d \text{ fc. } \left( \frac{p_1}{p_2} \right)$ , sans avoir en besoin d'entreprendre des expériences spéciales ~~liées~~ à ce sujet.

§. 4. L'exemple suivant (aussi) servira à démontrer l'utilité de la cette méthode en question:

Kohlrausch \*) a fait ~~une~~ <sup>des</sup> recherches sur les sons qui naissent dans un gaz passant par une <sup>fente</sup> ~~fissure~~ étroite (Spaltentöne).

— Les mesures s'étendaient <sup>à</sup> ~~sur~~ la dépendance entre le nombre des vibrations  $N$  ~~et~~, la largeur de la fente  $s$  et la pression  $p_1$  du gaz dans le réservoir. Comme celui-ci s'écoulait dans l'atmosphère libre, l'influence de la pression extérieure  $p_2$  ~~n'y~~ <sup>ne</sup> pouvait pas s'y manifester. Mais nous pouvons <sup>déterminer à priori</sup> ~~préciser~~ la manière dont elle se manifestera. Ce que nous cherchons, c'est la formule générale

\*) Wiedem. Ann. 13 p. 545 (1881).





$N = f(s, p_1, p_2)$ , dont le résultat empirique de Kohlransch:

$N = f(s, p_1, p_0) = \varphi(s, p_1)$ , avec  $p_2 =$  pression atmosphérique constante, égale à  $p_0$ , c'est un cas particulier.

Profitions de la similitude du mouvement  $s, p_1, p_2$  avec celui, où ces variables ont les valeurs  $s \frac{p_2}{p_0}, p_1 \frac{p_0}{p_2}, p_0$ , et où nous

aurons  $N_0 = \varphi(s \frac{p_2}{p_0}, p_1 \frac{p_0}{p_2})$ . ~~Les~~ Les nombres des vibrations dans ces deux cas seront en raison inverse du temps [comme ~~au~~  $\delta p_1$  et au  $\delta p_2$ ]

c'est-à-dire:  $N_0 : N = p_0 : p_2$ , et par conséquent, on aura le résultat cherché:

$$N = \frac{p_2}{p_0} \varphi(s \frac{p_2}{p_0}, p_1 \frac{p_0}{p_2}) = f(s, p_1, p_2)$$

↑ D'une manière analogue <sup>(voir § 8)</sup> on pourrait trouver l'effet d'un changement de température. ~~Est~~ <sup>Il</sup> est à regretter, qu'on ne ~~peut pas exploiter~~ <sup>puisse pas utiliser</sup> de cette ~~telle~~ façon des mesures de Kohlransch, parce qu'elles ne contiennent pas des valeurs explicites de  $p_1$ , mais seulement les vitesses moyennes  $U$ , qui en dépendent, et ~~la~~ parce que les résultats, condensés dans la formule approximative  $N = A(U-B)$  et dans un tableau des valeurs de  $A, B$ , en fonction de la variable  $s$ , ne fournissent pas la loi finale <sup>sous une</sup> ~~en~~ <sup>explicite</sup> ~~forme définie~~.

§ 10. Le troisième cas spécial  $b=1, m=1$  de la similitude, ainsi que les modifications produites par la dépendance de la viscosité de la température, présente moins d'intérêt.





Notons encore, qu'il n'y a qu'une <sup>genre</sup> ~~sorte~~ de similitude ~~possible~~ ~~des interactions produites par~~ lorsque la pesanteur intervient comme force extérieure:

$$m \equiv \sqrt{n}; \quad h \equiv n; \quad b \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{c'est ce}$$

(qui peut être appliquée aux courants de convection qui naissent par suite de différences de température.

§ 11. La similitude dynamique, s'applique-t-elle aussi aux mouvements de gaz différents? Pour <sup>trancher</sup> ~~trancher~~ cette question, on ~~change~~ <sup>changer</sup> ~~les~~ <sup>les</sup> coefficients ~~des variables normales~~ dans les équations (10, 12)

$R, k, \mu, \kappa$ . Évidemment, par suite de (12), toute similitude est exclue pour des gaz <sup>pour lesquels les</sup> à ~~différentes~~ valeurs de  $k$ . sont différentes

(Donc Supposons)  $k$  égal, et ~~posons~~ <sup>posons</sup>  $\alpha R$  au lieu de  $R$

On trouve

$$\begin{array}{ccc} \beta \mu & " & \mu \\ \beta \kappa & " & \kappa \end{array}$$

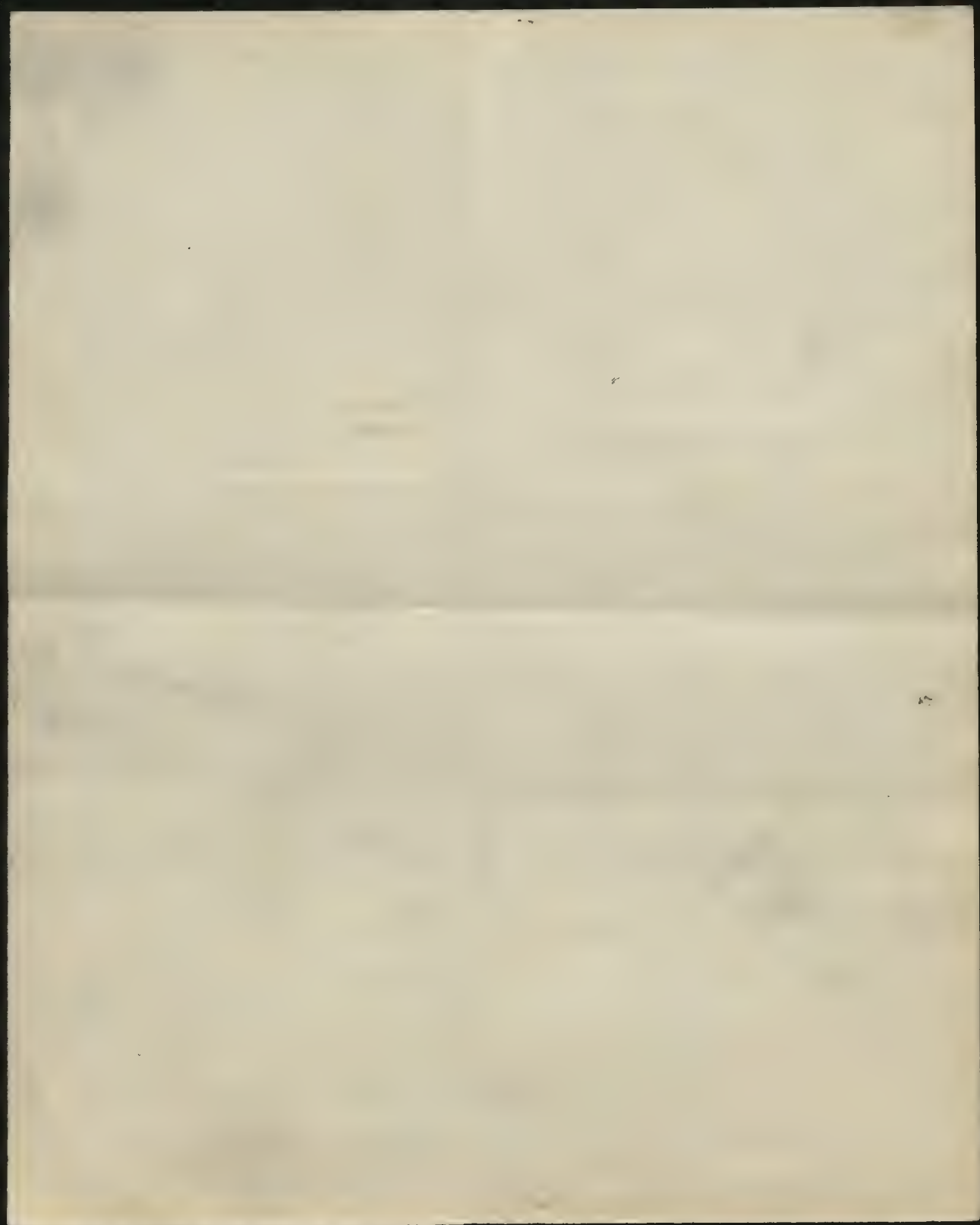
Les conditions suivantes en résultent:

$$(de 10): \frac{b}{\alpha h} \frac{m^2}{n} \equiv \frac{b}{n} \equiv \beta \frac{m}{n^2}$$

$$(de 12): \frac{m b}{n} \equiv \beta \frac{m^2}{n^2} \equiv \beta \frac{h}{n^2} \quad \text{qui se réduisent à}$$

$$\frac{\alpha \beta}{\beta} \equiv 1; \quad \alpha h \equiv m^2; \quad n b \equiv m \beta. \quad \} \dots \dots (16)$$

Comme  $R$  est proportionnel à l'inverse du poids moléculaire  $M$ , il résulte de la première de ces identités que la similitude n'est possible que pour des gaz ~~ayant~~ <sup>(pour lesquels)</sup> la même valeur de la constante  $\frac{\mu}{\kappa M}$ . est la même.





Le tableau suivant des coefficients  $\frac{\kappa}{\mu}$  (<sup>rapportés</sup> ~~rapportés~~ à l'air) multipliés par  $M$ , prouve que (cette condition est satisfaite pour plusieurs gaz) avec une approximation remarquable :

| $k=1.4$                | $H_2$                     | $O_2$                    | $N_2$                     | $CO$                        | $NO$                        |
|------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\frac{\kappa M}{\mu}$ | $\frac{6.7.2}{0.50} = 27$ | $\frac{10.32}{1.4} = 29$ | $\frac{10.28}{0.97} = 29$ | $\frac{0.98.28}{0.97} = 28$ | $\frac{0.95.30}{0.98} = 29$ |

| $k=1.3$                | $CO_2$                      | $N_2O$                      | $CH_4$                      | $NH_3$                      |
|------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\frac{\kappa M}{\mu}$ | $\frac{0.64.44}{0.82} = 34$ | $\frac{0.67.44}{0.82} = 36$ | $\frac{1.37.16}{0.62} = 35$ | $\frac{0.92.17}{0.57} = 27$ |

Ci quelques ~~des~~ applications ~~à quelques problèmes spéciaux~~ <sup>des considérations précédentes :</sup>

§ 12. Posons  $h=1$ ,  $b=1$ ; donc  $m^2=\alpha$ ,  $n=m\beta=\beta\sqrt{\alpha}$ .

Pour une certaine température et une certaine distribution de pression, il y a des mouvements ~~spéciaux~~ semblables dans deux vases ~~vases~~ semblables, dont les dimensions sont proportionnelles aux coefficients  $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$  des gaz renfermés; ~~donc~~ les vitesses <sup>alors</sup> seront proportionnelles à  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ .

1). En <sup>rapprochant</sup> ~~traitant~~ ce théorème <sup>de</sup> la loi <sup>(approximative)</sup> de Graham et Bunsen, qui <sup>admet</sup> ~~prétend~~ la proportionnalité (approximative) du volume des différents gaz ~~différents~~ <sup>passants</sup> à travers une ouverture dans une lame mince, à  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ , <sup>en</sup> on <sup>(suivant)</sup> déduit le résultat: que la quantité de gaz s'écoulant par des ouvertures différentes — à constante <sup>(différence)</sup> de pression —

1. The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the existence of solutions of the system of equations

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z) \end{aligned}$$

The second part of the paper is devoted to a detailed study of the case in which the functions  $f, g, h$  are analytic. In this case it is possible to obtain explicit formulas for the solutions of the system of equations. The third part of the paper is devoted to a study of the case in which the functions  $f, g, h$  are not analytic. In this case it is necessary to use numerical methods to obtain approximate solutions of the system of equations.



est proportionnelle à la surface de l'ouverture.

β). Supposons un conduit long et étroit, qui serait traversé par des volumes de gaz <sup>différents</sup> proportionnels à leur coefficient de fluidité  $\frac{1}{\mu}$ .

Notre théorème <sup>prouve</sup> établit ~~la conclusion~~ que le volume du gaz, passant par de ~~telles~~ ~~tels~~ conduits semblables, sera proportionnel au cube de leurs dimensions linéaires. ~~C'est un~~ <sup>Ce</sup> résultat <sup>est</sup> plus général, en quelque sorte, que la formule de Poiseuille <sup>-Meyer. s'applique</sup> qui ~~s'applique~~ dans le cas <sup>particulier</sup> d'un tube régulier circulaire.

γ). Un raisonnement analogue concernant des corps projetés <sup>montre</sup> que la pression de résistance sera proportionnelle à leurs dimensions linéaires, si l'on suppose que, pour des gaz différents, elle change en raison du produit de la viscosité et de la vitesse ~~et~~ qu'elle sera proportionnelle aux dimensions superficielles, si le produit de la densité et du carré de la vitesse en définit la valeur.

~~Ces derniers résultats ne sont pas nouveaux, mais leurs relations aux suppositions primaires sont bien mises en évidence par cette simple méthode, qui par son exactitude diffère des calculs usuels approximatifs, et qui donne des indications quand il faut s'attendre à un écart des formules.~~

~~C'est~~ <sup>C'est</sup> ~~un~~ <sup>autre</sup> exemple :

δ). Joule et Kelvin <sup>\*)</sup> ont mesuré l'élévation de température  $\Delta\theta$

<sup>\*)</sup> Kelvin, Mathem. Phys. Papers I p. 400, 445.

97

11



que subissent des corps (thermomètres, fils formant des couples thermoélectriques) <sup>qui</sup> traversent l'air avec une certaine vitesse.

— Les <sup>des savants anglais</sup> expériences <sup>démontrent</sup> la proportionnalité très approximative de  $\Delta\theta$  au carré de la vitesse [comprise entre  $30 \frac{m}{sec}$  et  $100 \frac{m}{sec}$ ] et son indépendance de la forme et de la grandeur du corps

[à peu près  $1^\circ C$  par  $55 \frac{m}{sec}$ ]. <sup>dont</sup> <sup>serait</sup> <sup>la</sup> vitesse  $v$

Imaginons 1. un corps donné, dans l'air 2. un deuxième, pareil, dans un autre gaz 3. un troisième dans le ~~gaz~~ <sup>donné</sup>, à dimensions augmentées en raison de  $\sqrt{\frac{M_0}{M}}$ , et donc d'une vitesse ~~diminuée en raison~~  $v \sqrt{\frac{M_0}{M}}$ ; en appliquant notre théorème à la

comparaison des <sup>corps</sup> 1-3, le résultat empirique de Kelvin <sup>(la comparaison des corps)</sup> à  $\sqrt{3-2}$  nous pouvons ~~dire~~ <sup>difficile</sup> que: dans des gaz différents (mais ~~distincts~~ <sup>pour lesquels  $k$  a</sup> la même valeur de  $k$ ) un corps animé de la vitesse  $v$  s'échauffera proportionnellement à la quantité  $\Delta\theta = a M v^2$ , W. D. C.

c'est-à-dire en raison du poids spécifique du gaz et du carré de la vitesse. <sup>Il résulte en outre de</sup> l'application des théorèmes <sup>du</sup> § 8 et <sup>du</sup> § 9 <sup>résulte</sup>, en outre, le résultat inattendu que la constante  $a$  est indépendante de la pression du gaz et de sa température.

<sup>l'extension</sup> Si <sup>à</sup> l'extension de cette formule ~~pour~~ des vitesses supérieures à la vitesse du son était permis, on pourrait évaluer, par exemple, l'échauffement d'un météore traversant l'air à une vitesse

1875-1876





de 2.8 km à 2500°C.

25

Il faut noter que la formule empirique ne s'applique plus aux vitesse petites (moindres que  $30 \frac{m}{sec.}$ ), mais les mesures n'étaient pas <sup>moment exactes</sup> suffisantes pour mettre en évidence <sup>et les écarts</sup> la ~~modification~~ de la loi en question.

~~For~~ Supposons:

§ 13. ~~Supposition~~  $(h=1, n=1; \text{ donc: } m=\sqrt{\alpha}, l=\beta\sqrt{\alpha})$ :

Même ~~mesure~~ <sup>vale</sup> même température; les mouvements de différents gaz seront semblables, pourvu que les pressions soient en raison de ~~leur~~  $\frac{m}{M}$ ; alors les vitesses (et les volumes) seront proportionnels à  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ .

2). En effet, cette proposition ~~est~~ <sup>s'accorde avec</sup> la formule ordinaire pour la vitesse du son, et aussi <sup>on</sup> par la formule de Kirchhoff [§ 9a, -] pour des tuyaux. De plus,

~~On~~ <sup>on</sup> voit-on facilement que la formule de Strouhal (§ 9 <sup>§ 9</sup>), pour la hauteur du son produit par le mouvement d'un corps cylindrique, entraîne l'identité de la constante  $c$  pour les gaz <sup>Divers</sup> ~~divers~~, c'est-à-dire ~~(X)~~ <sup>que la</sup> indépendante ~~du son~~ de la qualité du gaz. —

— Nous ne connaissons pas encore d'expériences ~~à ce sujet~~ à ce sujet.

— De même <sup>que</sup> ~~Enden~~ <sup>en</sup> ayant établi la formule (§ 9 <sup>§ 9</sup> <sup>§ 9</sup>) pour l'air, aurait pu ~~conclure~~ <sup>en</sup> ~~conclure~~ <sup>conclure</sup> à priori, que la largeur des ~~canalures~~ <sup>est</sup> ~~est~~ indépendante de la nature du gaz, ce que ont démontré ses expériences, <sup>de même</sup> ~~ainsi~~ nous pouvons prédire (d'après § 8) qu'on la trouvera indépendante de la température. — w d. c.

Sur laquelle elle repose



~~Les considérations~~ <sup>semblables</sup> ~~des~~ <sup>semblables</sup> ~~considérations~~ <sup>semblables</sup> peuvent souvent faciliter les recherches expérimentales et ~~on~~ étendre la portée des résultats obtenus.

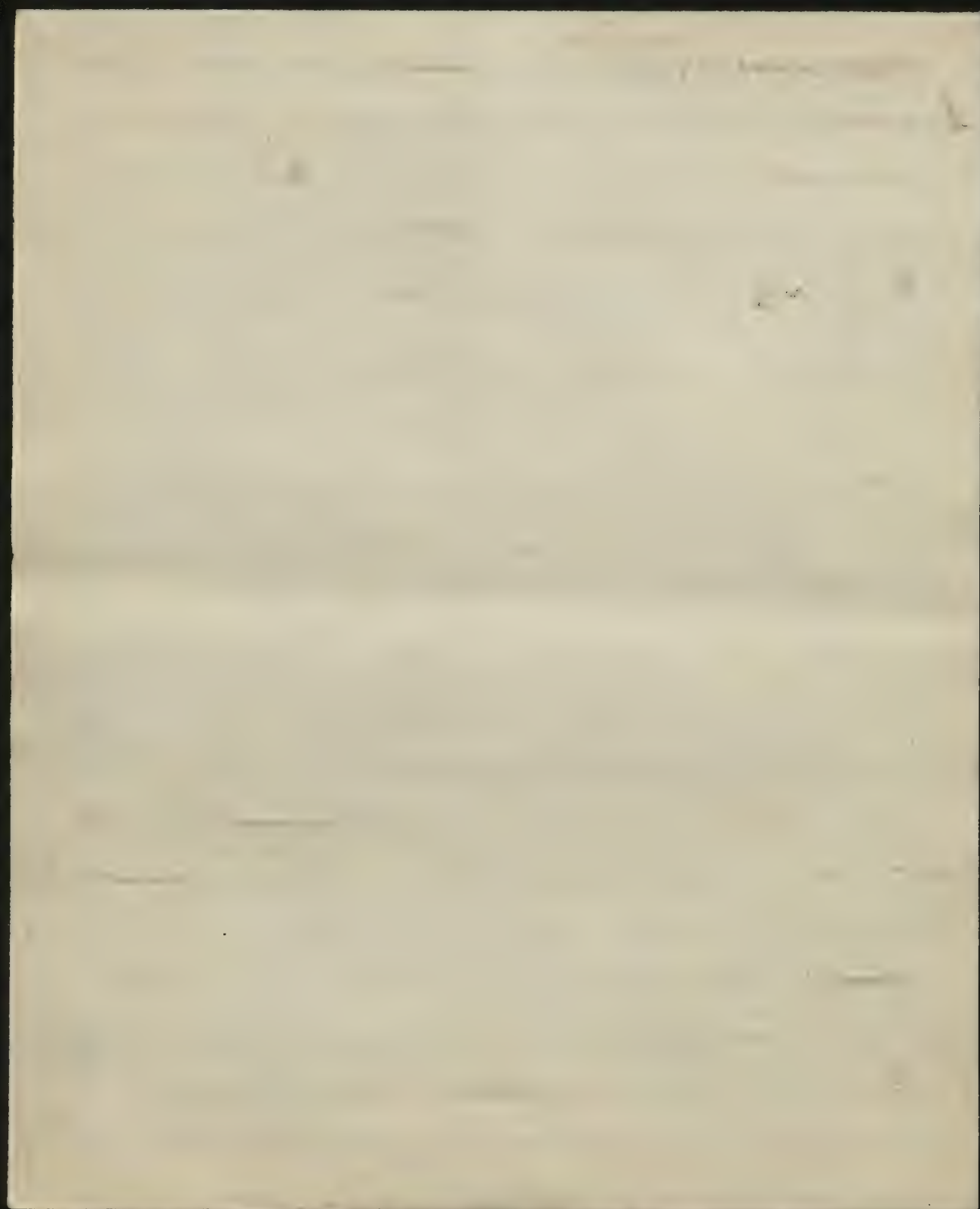
β). Le rapport du volume d'un gaz <sup>qui</sup> s'écoule à <sup>l'action</sup> la différence de pression sera, pour des gaz différents, proportionnel à leur fluidité:

$$\frac{V}{p_1 - p_2} \sim \frac{1}{\mu}, \quad \text{si l'on y emploie des pressions correspondantes.}$$

En vertu de cette conclusion, on peut <sup>appliquer</sup> ~~introduire~~ un procédé plus exact <sup>aux</sup> ~~des~~ mesures de la viscosité. — w d. c.

— La formule de Poiseuille-Meyer  $\frac{V}{p_1 - p_2} = \frac{R^4 n}{8 L \mu} \frac{1}{\mu}$  ne tient compte ni de l'inertie du gaz, ni de l'effet visqueux de la variabilité de la vitesse le long du tube, ni des différences de température (§ 27). (Pourtant on peut trouver la valeur exacte de la viscosité relative; en n'employant pas des pressions non pas quelconques, mais des pressions proportionnelles à  $\frac{\mu}{M}$  pour les gaz divers. Il est remarquable que ce résultat subsiste <sup>est</sup> indépendant <sup>et qu'il subsiste</sup> de la forme du tube ou de l'orifice, même pour l'écoulement par un trou dans une lame mince.

γ). ~~La~~ <sup>Pourtant à l'abri des</sup> méthode de Maxwell-Meyer des "disques oscillants" qui n'est ~~pas sans~~ <sup>objections</sup>, à cause de l'inexactitude de la théorie mathématique <sup>aussi</sup> peut servir à des mesures exactes de la viscosité; seulement il faut employer des pressions correspondantes, et la



insuspension du disque doit varier de ~~tel~~ sorte, qu'on puisse produire <sup>des</sup> ~~un~~ temps d'oscillation proportionnel à  $\sqrt{M}$ .

Évidemment, tout ce qui a été dit s'applique ~~en toute rigueur~~ <sup>seulement</sup> ~~sauf~~ sous condition que  $k$  et  $\frac{kM}{\mu}$  soient égaux, ~~pour les~~ <sup>et même</sup> gaz comparés, ~~mais aussi~~ lorsqu'il y a des petites différences, ~~elles~~ ces petites mesures seront plus exactes, que d'après les méthodes ordinaires. \*)

\*) On en pourrait profiter pour élucider la cause des divergences <sup>qui existent</sup> entre les résultats, donnés par les deux méthodes mentionnées (problématique jusqu'à présent) [Schumann Wied. Ann 23 p. 353 (1884)]

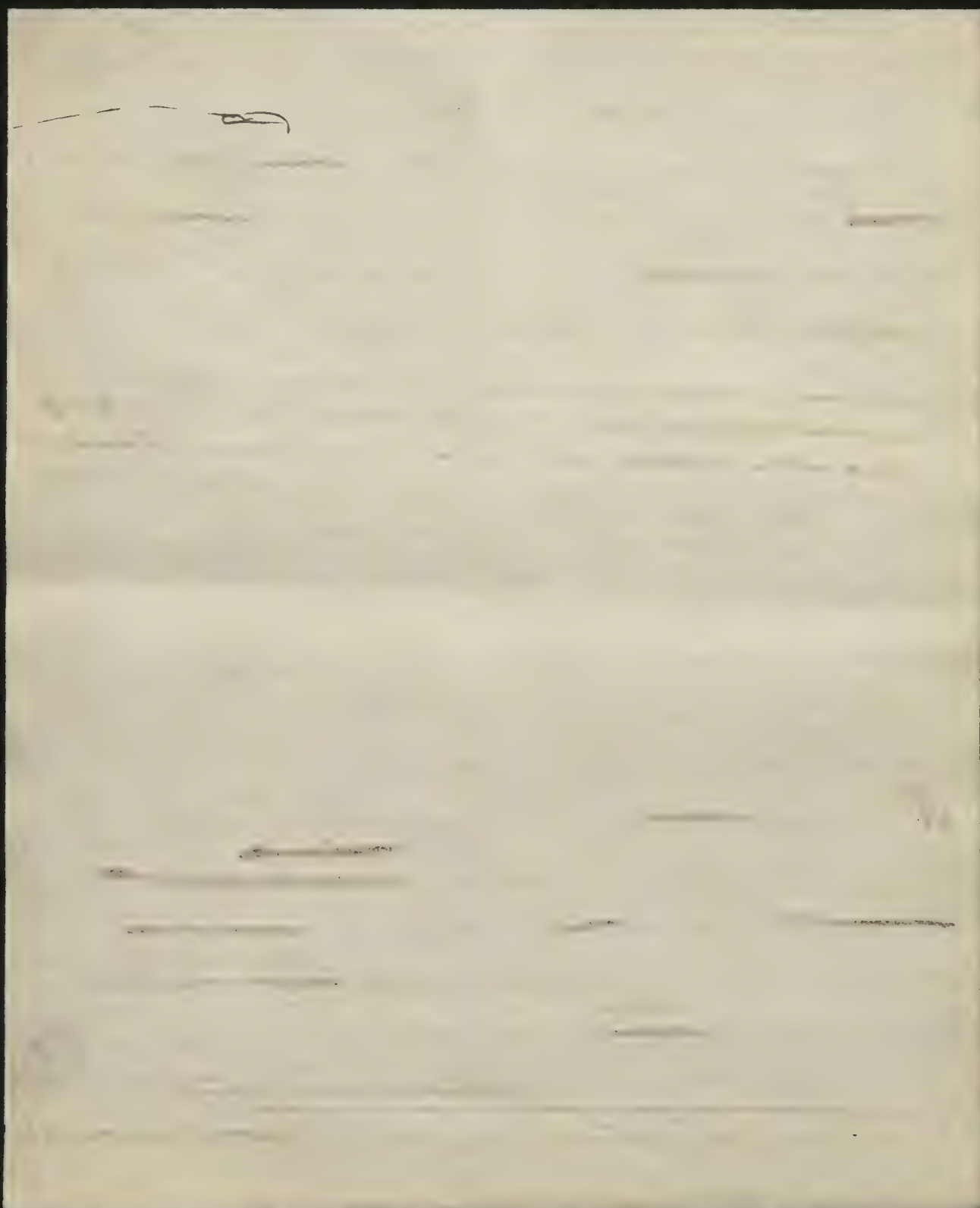
### III. Phénomènes thermiques d'écoulement.

§ 14. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer nos équations à l'examen des phénomènes thermiques qui se manifestent dans un gaz s'écoulant par des tubes ou des orifices, <sup>qui ont fait le</sup> ~~phénomènes~~ sujet des célèbres recherches de Joule et de Kelvin. \*) — w d. c. —

Il est vrai, ~~essentiellement~~ <sup>possible</sup>, qu'il n'y a pas de doute quant à l'interprétation générale de ces expériences, ~~ainsi qu'elles appartiennent~~ <sup>lesquelles sont</sup> ~~à l'incertitude~~ <sup>en</sup> classées de ~~la~~ <sup>Thermodynamique</sup> ~~expérimentale~~ <sup>mais</sup> ~~cependant~~ <sup>offrent des difficultés</sup> leur explication détaillée ~~est~~ <sup>résolues</sup> qui ne peuvent être ~~obtenues~~ <sup>que</sup> par une théorie détaillée <sup>(du phénomène Joule-Kelvin)</sup> ~~hydrodynamique~~ <sup>hydrodynamique</sup>. Ainsi l'explication usuelle ~~ne prend pas en considération~~ <sup>tient pas compte de</sup>

\*) Kelvin Mathem. Physik. Papers I p. 333; Joule Mechan. Wärmeäquivalent, Braunschweig 1872.





variabilité de <sup>la</sup> vitesse et peut être de <sup>la</sup> température dans les différentes couches ~~du~~ <sup>du</sup> gaz ; ~~on~~ <sup>on</sup> ~~se~~ <sup>se</sup> comprend ~~donc~~ <sup>donc</sup> qu'il y ~~aura~~ <sup>ait</sup> un abaissement de température dans un gaz qui ~~se~~ <sup>se</sup> dilate, mais la manière dont il se répartira sur le gaz ~~qui s'échappe~~ <sup>qui s'échappe</sup> et celui qui reste dans le réservoir, n'est pas ~~certaine~~ <sup>certaine</sup> évidente.

~~Donc~~ <sup>Donc</sup>, nous transformerons l'équation (12) en la multipliant par un élément de volume <sup>en</sup>  $dV$  et l'intégrant sur toute l'espace en question.

Remarquons, en outre, que

$$\iiint p \operatorname{div} d\omega = \iint p (u l + v m + w n) dS - \iiint \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\omega \quad \dots \dots \dots (17)$$

introduisons les valeurs de  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z}$  <sup>données par</sup> ~~de~~ (10) et transformons les intégrales triples — exceptée celle qui renferme  $\frac{\partial}{\partial t}$  — ~~en~~ <sup>en</sup> intégrales doubles. En désignant la vitesse normale à la surface par  $v_n$ , la vitesse totale par  $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ , nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left[ \frac{\rho}{k-1} + \rho \frac{V^2}{2} \right] d\omega + \iint \left[ \left( \frac{k}{k-1} \rho + \rho \frac{V^2}{2} \right) \frac{1}{2} v_n - \frac{\rho}{3} v_n \operatorname{div} - \rho \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{V^2}{2} \right) \right] dS + \\ + \rho \iiint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots + \frac{1}{3} (\operatorname{div})^2 \right] d\omega = \iint \Phi d\omega + \kappa \iint \frac{\partial \theta}{\partial n} dS \quad \dots \dots (18) \end{aligned}$$

L'intégrale triple de gauche multipliée par  $\mu$ , annule les termes correspondants de  $\Phi$ ; ~~et~~ les autres peuvent être transformés par intégration partielle d'après la formule

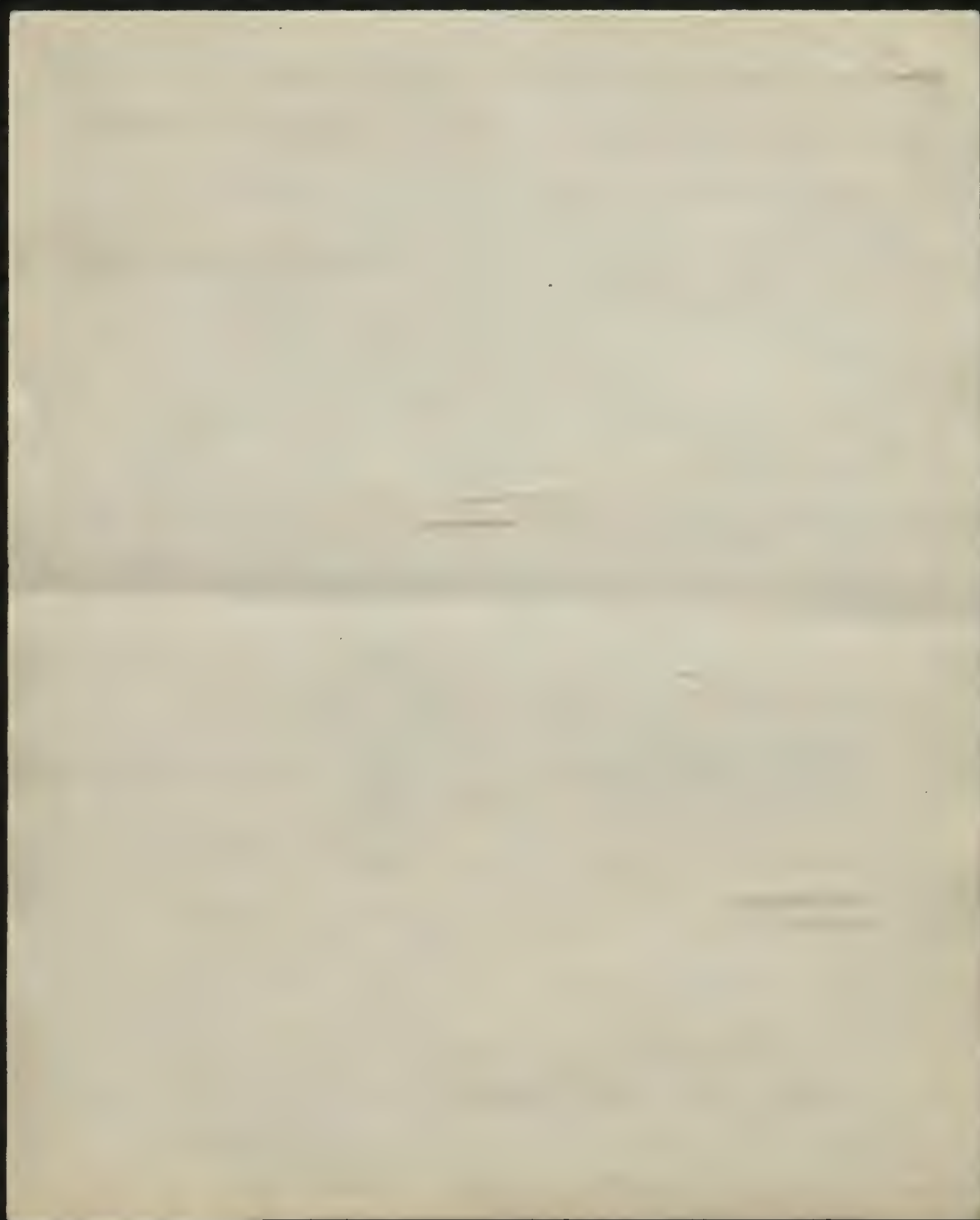
$$\iiint \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega = \iint w \left( m \frac{\partial v}{\partial z} - n \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS \quad \dots \dots \dots (19)$$

~~2. 10. 1911~~

~~4. 10. 1911~~







négliger ces premiers termes, mais on ne peut pas faire de même avec l'intégrale  $\int$  qui dépendra de la distribution des vitesses et de la température entre ces deux points et qui, en général, ne sera pas négligeable. <sup>Cela</sup> ~~serait~~ serait vrai, par exemple, si l'équation

~~la~~ <sup>la</sup> ~~serait~~  $\nabla^2 \left[ \mu \frac{V^2}{2} + k \theta \right] = 0;$  avait lieu — mais évidemment, ce serait un cas tout exceptionnel.

A). Donc, on ne peut pas prétendre que la température d'un gaz, s'écoulant d'une manière ~~so~~ stationnaire, reste invariable; ses différentes couches auront des températures différentes.

§ 16. Le théorème de constance de <sup>la</sup> température ne s'applique que dans un cas particulier, à la température moyenne.

(Ce que nous appelons température moyenne d'un profil, c'est la température qui s'établirait dans le gaz, passant par une surface orthogonale <sup>de flux d'écoulement</sup> aux lignes ~~de flux~~ <sup>de flux</sup>, si toutes ses couches étaient mélangées d'une façon complète — c'est à dire:

$$\Theta = \frac{\sum \theta_p V_g}{\sum p V_g} \quad \text{ou} \quad \dots \dots \dots (22)$$

où la sommation s'étend sur tous les éléments de la surface orthogonale.)

Supposons, ~~par~~ ~~soit~~ pour fixer les idées, que le point 1 soit situé à l'intérieur du réservoir 1, où les conditions de lenteur et d'uniformité du mouvement sont satisfaites. Envisageons



975  
111  
1

111

maintenant les équations (21) ou (20) et notons le fait <sup>+</sup> que les parois du <sup>réservoir</sup> vaisseau et du <sup>conduit</sup> tube sont formées par des tubes de flux adhérents, c'est-à-dire qu'on peut développer  $V$  en désignant la distance d'un point des parois par  $\delta n$  — de la façon suivante:

$$V = \delta n \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right), \text{ par conséquent: } \frac{\delta}{\delta n} (V^2) = 2 \delta n \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)^2$$

ce qui disparaît ~~par~~ à la surface (pour  $\delta n = 0$ ) de même que  $V$ .

Donc, on aura pour la température moyenne l'équation

$$\frac{kR}{k-1} [\theta - \Theta] = \frac{\frac{1}{2} \sum \rho q V^2 + \mu \sum \left( \frac{2}{3} \text{div} + 2 \frac{\partial V}{\partial n} \right) q V + \int k \frac{\partial \theta}{\partial n} dS}{\sum \rho q V} \dots \dots \dots (23)$$

L'intégrale  $\int k \frac{\partial \theta}{\partial n} dS$  ~~peut~~ <sup>peut</sup> être divisée en trois parties <sup>sections</sup> qui correspondent aux parois du vaisseau et aux deux ~~coûtes~~ transversales. La partie première sera nulle, si l'on suppose que les parois sont des isolateurs <sup>idéaux</sup> ~~idéaux~~ de la chaleur; de même les deux autres, si la <sup>section</sup> coupe passe par des endroits où il y a uniformité suffisante.

B. Donc, dans des endroits où le courant stationnaire est assez lent et uniforme, la température moyenne du gaz <sup>qui</sup> s'écoule est égale à celle qui règne dans le réservoir primaire. — W. d. C. —  
— C'est ce qu'ont démontré les expériences de Joule et Kelvin sur des gaz qui présentent les moindres écarts de la loi Boyle-Charles,

99  
1

~~99~~  
1

99

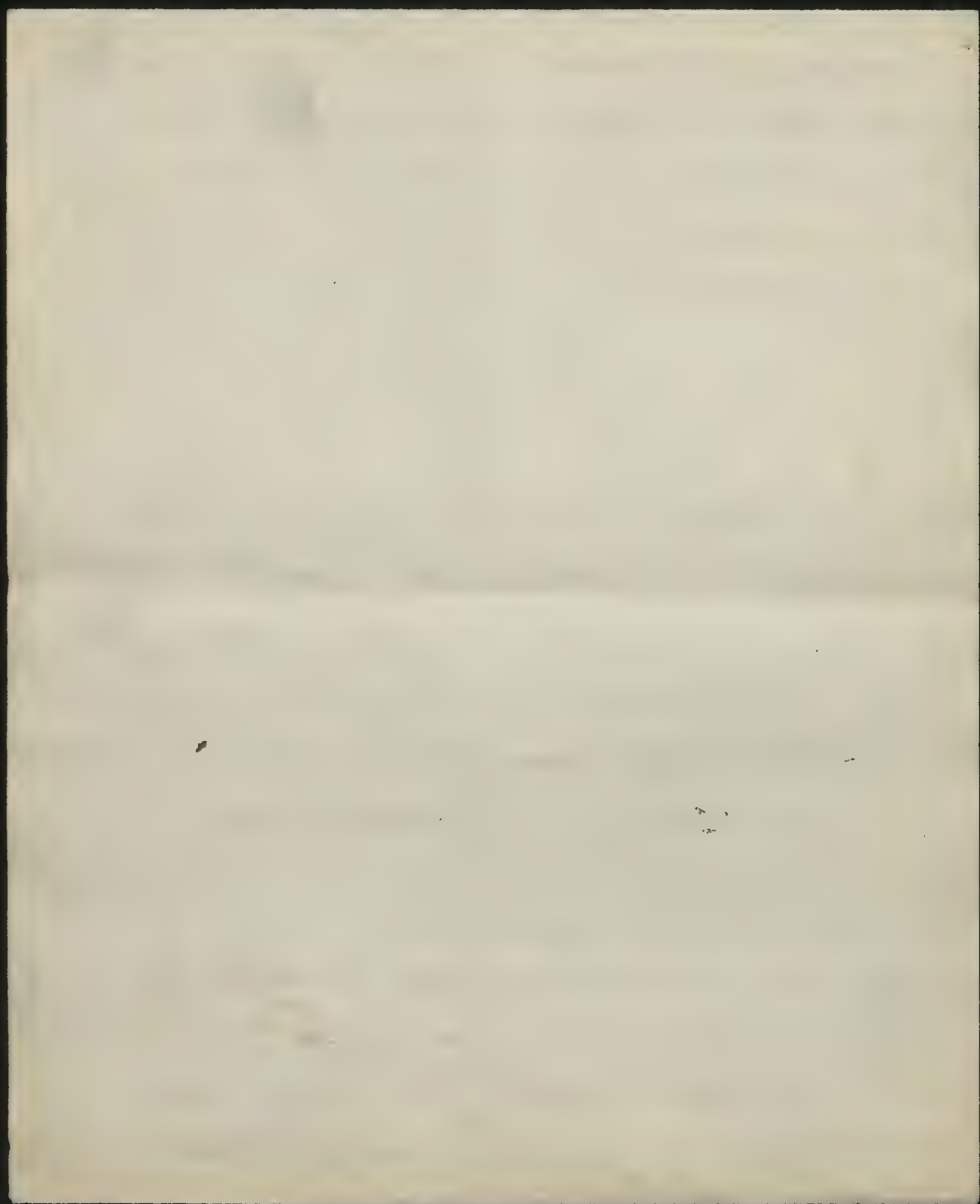


l'hydrogène, et où le bouchon de <sup>remplace</sup> ~~ouate~~ <sup>représente</sup> un système de tubes d'efflux. Il serait intéressant, d'autre part, de vérifier notre résultat précédent, concernant les différences de température dans les couches diverses d'un gaz quittant un tube étroit, <sup>résultat</sup> qui distingue notre théorie du raisonnement usuel. — W. D. C.

Cette différence provient de ce que le travail dans un gaz visqueux n'est pas donné par  $\int (u l + v m + w n) p dS$ , mais par  $\int (u p_{xx} + v p_{yy} + w p_{zz}) dS$ . L'identité de ces deux expressions peut être démontrée facilement, pour le mouvement stationnaire, à l'aide de transformations semblables à celles du § 14, mais seulement pour toute la quantité du gaz comprise entre les parois et les deux <sup>sections</sup> ~~surfaces~~ dans les réservoirs, et non pas pour <sup>des</sup> ~~les~~ tubes de flux singuliers <sup>considérés</sup> ~~particuliers~~ pris isolément.

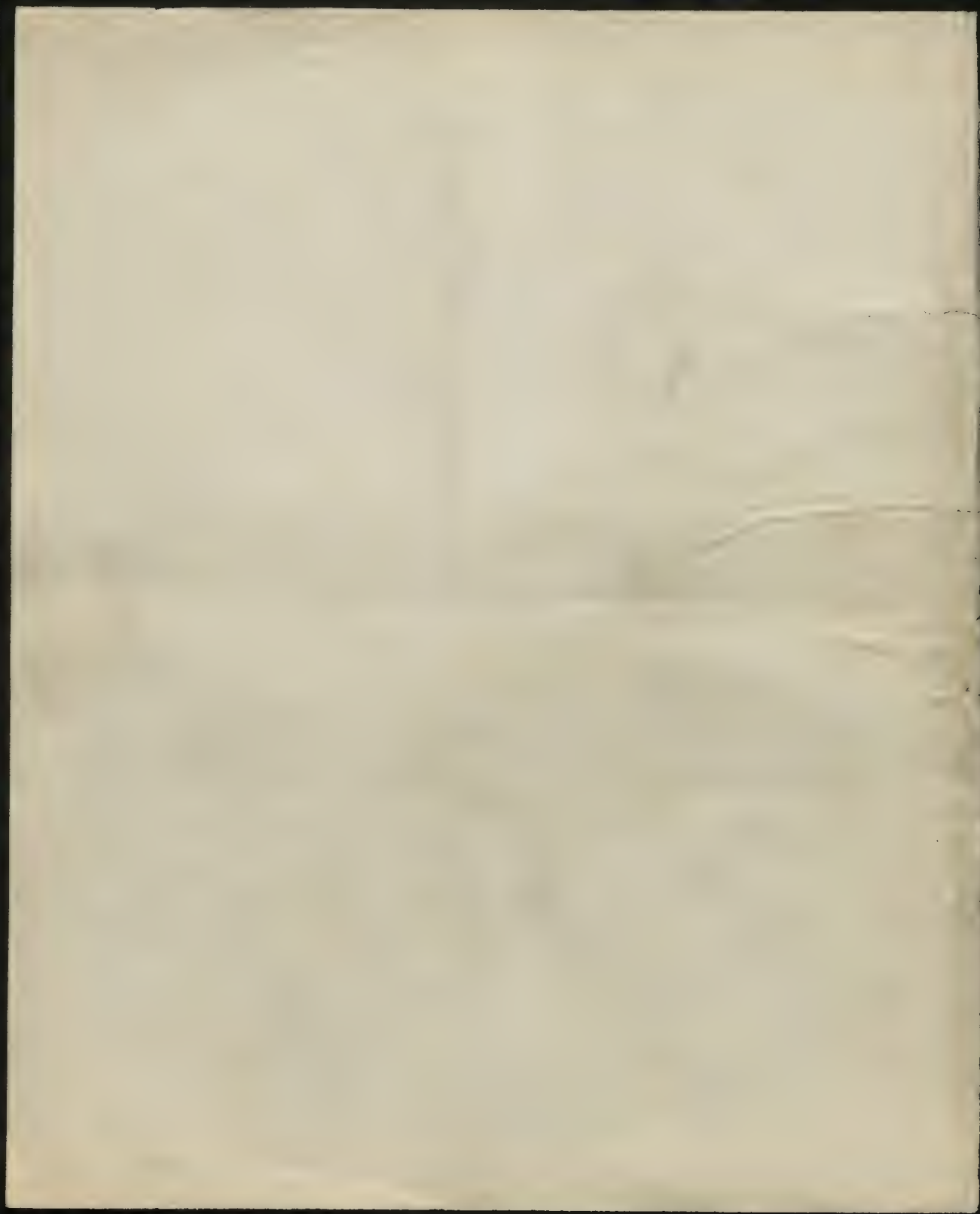
Evidemment, ces remarques ne <sup>concernent</sup> ~~regardent~~ pas du tout les conclusions qu'on tire du phénomène de Joule et Kelvin, concernant les écarts de la loi Boyle Charles.

§ 17. Envisageons encore l'équation (21) et considérons que, pour les tubes de flux adhérents aux parois,  $\frac{\partial V}{\partial t}$  <sup>sont</sup> ~~sont~~ nuls. Puisque la température dans ces couches doit rester finie, ceci entraîne la conclusion, que l'intégrale de droite



1711-1712





$$-\frac{k}{k-1} R \frac{d\theta}{ds} = V \frac{dV}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds}$$

dont l'intégration, en combinaison avec la loi D. Ch. mène à la formule ordinaire de détente adiabatique:

$$\text{habitue à considérer } \frac{\theta_0}{\theta_1} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{k-1} \quad \dots \dots \dots (26)$$

On est ~~accoutumé de voir~~ cette formule ~~supposée~~ comme évidente à priori, dans des ~~ces~~ appareils ~~Consomme d'énergie, en réalité, les~~ pour des gaz réels (le simple ~~examen de la démonstration~~ ~~qu'elle~~ !


exigerait un refroidissement d'un courant stationnaire, correspondant à la chute de pression de  $p_1$  à  $p_2$ :  $\theta_2 = \theta_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$ ,

tandis que nous avons vu dans § 16, que la température moyenne reste invariable. approximativement

C). L'équation (24) au contraire, reste applicable avec une certaine approximation dans ce cas, pour un gaz visqueux, puisque l'abaissement de température ne correspond pas à <sup>une</sup> l'expansion, mais <sup>à un</sup> gain d'énergie cinétique.)

(La température s'abaisse le plus où la vitesse est maximale, p. ex. à l'orifice d'une bombe à gaz comprimé, et c'est cet abaissement \*) qui a été utilisé par divers observateurs <sup>pour</sup> la liquéfaction des gaz, d'après la méthode dynamique.

(A mesure que le gaz perd sa vitesse, il regagne aussi sa température <sup>première</sup> ~~primaire~~ par suite de la chaleur de friction. Donc, l'emploi direct \*) ~~Appréhensé~~ par suite du phénomène ~~Thomson~~ Kelvin.

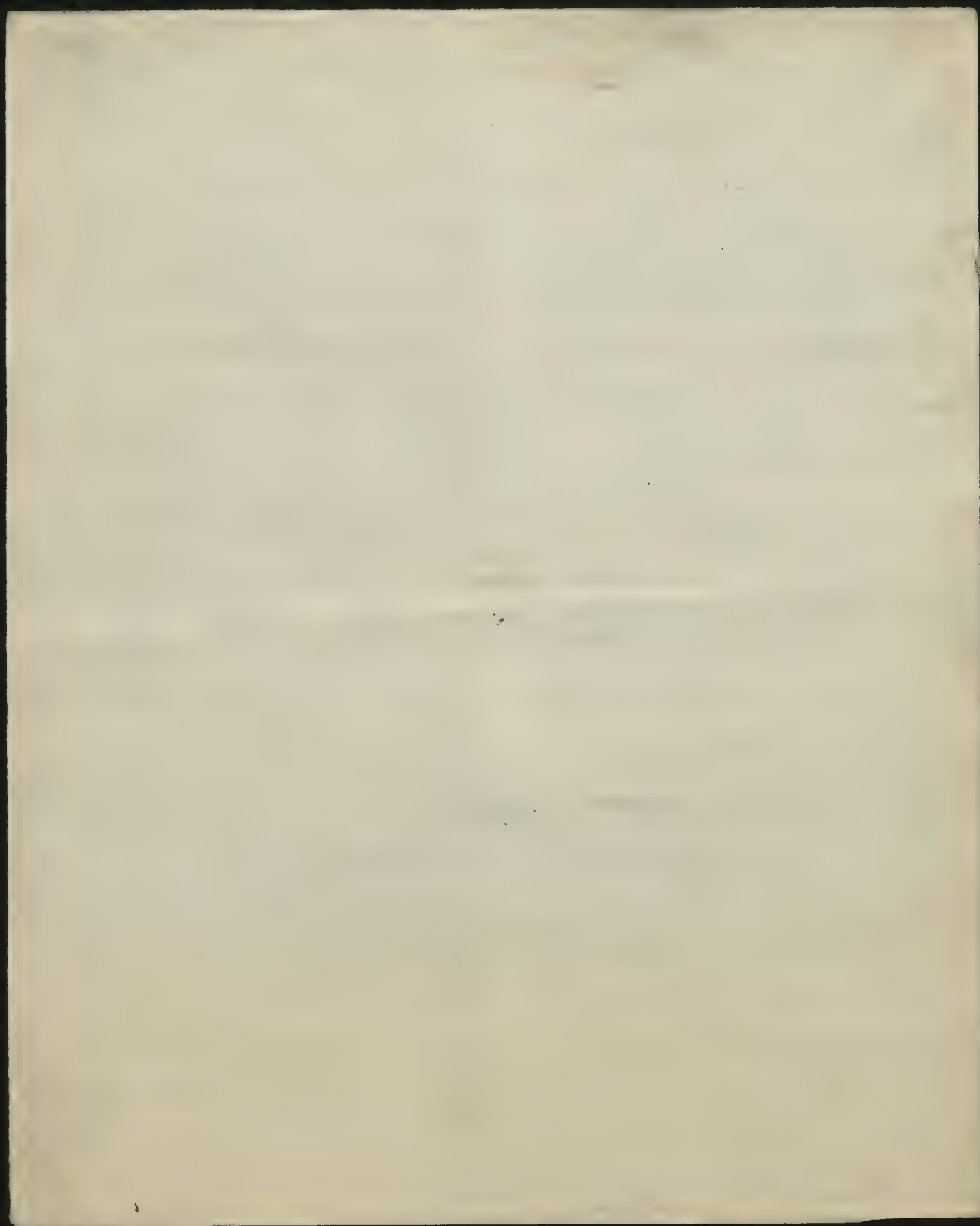
 = *stabilité*

~~98~~ 9

27







ce qui, joint à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \iint dV = -\rho \iint v_n dS \quad \text{--- (28)}$$

donne le résultat  $p = p_0 e^{-\frac{k}{\rho_0} \iint v_n dS dt}$  --- (29)

[ $\Omega$  désignant le volume total du réservoir 1] et la formule (26).

D). Donc, à l'intérieur du réservoir 1, la pression et la température s'établissent d'après la formule ordinaire de détente adiabatique.

§ 20. Dans le tuyau de décharge, le problème sera plus compliqué et ne peut ~~être~~ <sup>analysé</sup> ~~supposé~~ que par <sup>d'une</sup> moyen de solution détaillée, mais on peut trouver la température approximative du gaz qui

l'a traversé. Appliquons les équations (27, 28) à deux ~~coupes~~ <sup>des lignes de flux</sup> sections transversales, l'une située dans le réservoir 1, pris de son issue, l'autre au réservoir 2, pris de l'entrée, et désignons les volumes correspondants par  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . ~~Si on~~ On obtient les équations:

Pour  $\Omega_1$  comme plus haut:

$$\Omega_1 \frac{dp_1}{dt} + k p_1 \iint_1 v dS = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{--- (30)}$$

$$\Omega_1 \frac{dp_1}{dt} + p_1 \iint_1 v dS = 0$$

Pour  $\Omega_2$ , en négligeant le volume du conduit, d'une manière analogue

$$\frac{d}{dt} (\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2) + k \iint_2 p_2 v dS = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{--- (31)}$$

$$\frac{d}{dt} (\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2) + p_2 \iint_2 v dS = 0$$



↑ où la mission terminée?

En divisant (31,1) par (31,2) et en ~~supposant~~ <sup>diminuant</sup> ~~que~~  $\Omega_2$  en comparaison avec  $\Omega_1$  on obtient

$$k \frac{p_2}{p_1} = \frac{\cancel{k} \Omega_2}{\cancel{k} \Omega_1} = \frac{d(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2)}{d(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2)} = \frac{dp_1}{dp_1} = k \frac{p_1}{p_1} = \cancel{k} \frac{p_1}{p_1}$$

c'est à dire:  $\theta_2 = \theta_1$

(Pour que les ~~hypothèses~~ <sup>hypothèses</sup> de l'énoncé B soient remplies) dans le  
E). Donc la température moyenne du gaz entrant ~~au~~ <sup>dans le</sup> réservoir 2  
<sup>(approximativement)</sup> sera (la même que celle du gaz renfermé dans le réservoir 1, qui s'équilibre  
d'après la formule adiabatique (quoique la pression soit  
inférieure).

On peut vérifier ce résultat, qui est basé, évidemment, sur les  
suppositions de l'énoncé B, en calculant ~~le~~ <sup>le</sup> travail  
extérieur et la quantité de chaleur "absorbée", ce qui donne des  
valeurs égales  $= T \frac{(p_0 - p_1)}{k}$ , <sup>évidemment</sup> moindres, ~~naturellement~~, que des les  
valeurs <sup>qui</sup> ~~correspondent~~ <sup>correspondent</sup> à une expansion réversible.

§ 21. Ces résultats méritent <sup>d'attirer</sup> l'attention des physiciens qui  
étudient l'effusion <sup>(la transpiration)</sup> et <sup>analogues</sup> les phénomènes ~~parois~~, parce qu'ils démontrent  
l'exactitude des recherches sur l'afflux stationnaire  
exécutés à l'aide de réservoirs fermés <sup>(à pression baissante)</sup>.

Ainsi <sup>\*)</sup> ~~Donnan~~ en mesurant le temps nécessaire à un abaissement  
de la pression dans le réservoir de 525 mm. à 322 mm. n'a pas

\*) Philos. Magazine 49 p. 423 (1900)





obtenus, en réalité, des nombres relatifs pour le temps nécessaire d'effusion des gaz divers, puis que la température ne restait pas constante, comme il croyait, égale à  $25^{\circ}\text{C}$ , mais pouvait s'abaisser: pour l'air à  $-14^{\circ}\text{C}$ ; pour  $\text{CO}_2$  à  $-9^{\circ}\text{C}$ ; pour l'argon à  $-28^{\circ}\text{C}$ . —

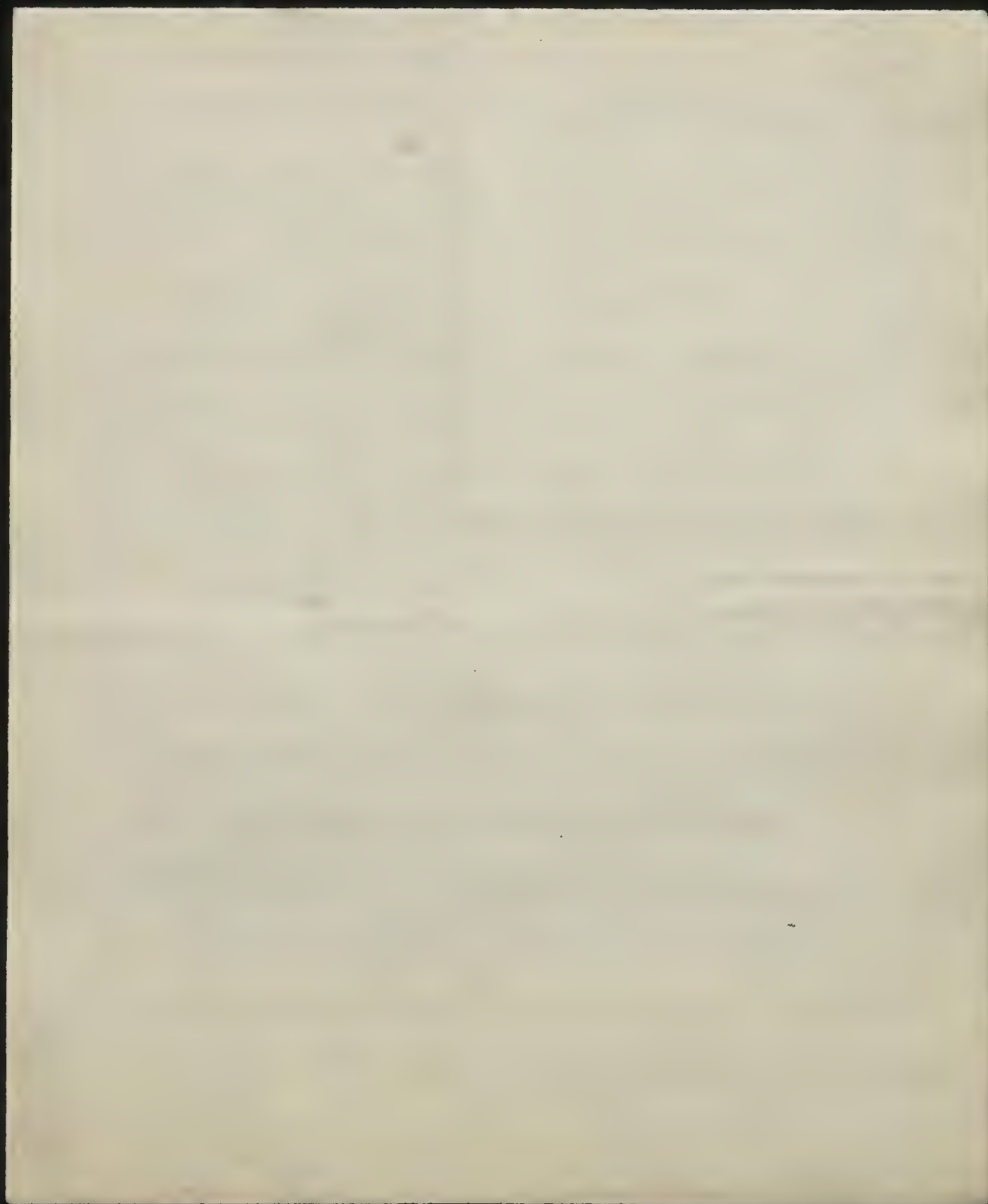
— Les nombres <sup>sont</sup> ~~sont~~ exagérés sans doute puis que les différences devaient être <sup>diminué</sup> ~~moindres~~ <sup>suite de la</sup> ~~importantes~~ par conduction de la chaleur aux parois du vaisseau, mais en tout cas, cette grave source d'erreurs indique la nécessité de l'emploi des gasomètres à pression constante. ~~comme l'appareil de Dumas~~ (§ 19).

(C'est une ~~condition~~ condition, dont l'importance a été bien appréciée par Joule et Kelvin dans leurs travaux. ~~2~~)

(Les mêmes considérations s'appliquent à la plupart des recherches semblables ~~possibles~~ et aussi, en quelque sorte aux travaux intéressants de

(loc. cit.)  
Eucken. Cet ~~autre~~ expérimentateur n'y a pas remédié par l'emploi de la soupape régulatrice (Druckreduzierungsventil), puis qu'il n'a pas pris soin de réchauffer le gaz sortant, à une température invariable.

— Cette objection est encore plus importante pour les expériences de Mach et Salcher, <sup>faites à</sup> ~~avec~~ une pression plus haute et <sup>avec</sup> réservoir de moindre



capacité, ce qui <sup>peut</sup> expliquer aussi l'écart entre les observations de l'abaissement de ~~la~~ température <sup>dans le</sup> jet de gaz. (une dizaine de degrés d'après Emden, une centaine d'après Mach).

(Le thermomètre, d'ailleurs, n'est nullement applicable à la mesure de la température dans d'un gaz animé d'une grande vitesse, puis que le mouvement du gaz et la distribution de chaleur changeraient complètement par suite de sa présence. <sup>3</sup>)

#### IV. Solutions spéciales de <sup>quelques</sup> problèmes d'aérodynamique.

§ 22. Nous nous bornerons à l'étude de quelques problèmes simples, dont quelques uns, toutefois, ~~représentent~~ <sup>(des méthodes plus</sup> ~~générales.~~ <sup>générales.</sup> <sup>montrent l'application</sup>

L'exemple le plus simple, ~~à l'étude~~, est le mouvement stationnaire d'un gaz compris entre deux parois cylindriques, concentriques; l'intérieure <sup>dont le</sup> rayon  $r_1$  <sup>est</sup> fixe, et l'extérieure <sup>est</sup> de rayon  $r_2$ , <sup>effectuant une rotation</sup> de  $n$  tours par seconde.

(Désignons par  $\omega$  la vitesse angulaire correspondante au rayon  $r$ ;

alors nous aurons la solution des équations (10)

$$u = -\omega \frac{r^2}{2} ; \quad v = \omega \frac{r^2}{2} ; \quad \text{sous la condition que } \omega$$





satisfait à l'équation :

$$\omega = -\frac{a}{2r^2} + b = \frac{2an}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right] \quad \text{--- (33)}$$

Les pressions peuvent être résultant de  $\frac{dp}{dr} = \omega^2 r \rho$ , si la température est connue. Celle-ci est déterminée par l'équation (12), qui, intégrée, donne

$$\theta = \theta_0 + \frac{\mu}{4k} a^2 \left[ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right] + c \log \frac{r}{r_2} \quad \text{--- (34)}$$

où  $\theta_0$  désigne la température de la paroi extérieure.

Pour déterminer le coefficient  $c$ , supposons que le cylindre intérieur soit isolé <sup>au</sup> point de vue thermique.

Il atteindra l'équilibre thermique lorsque :  $\kappa \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=r_1} = 0$ .

La température correspondante est

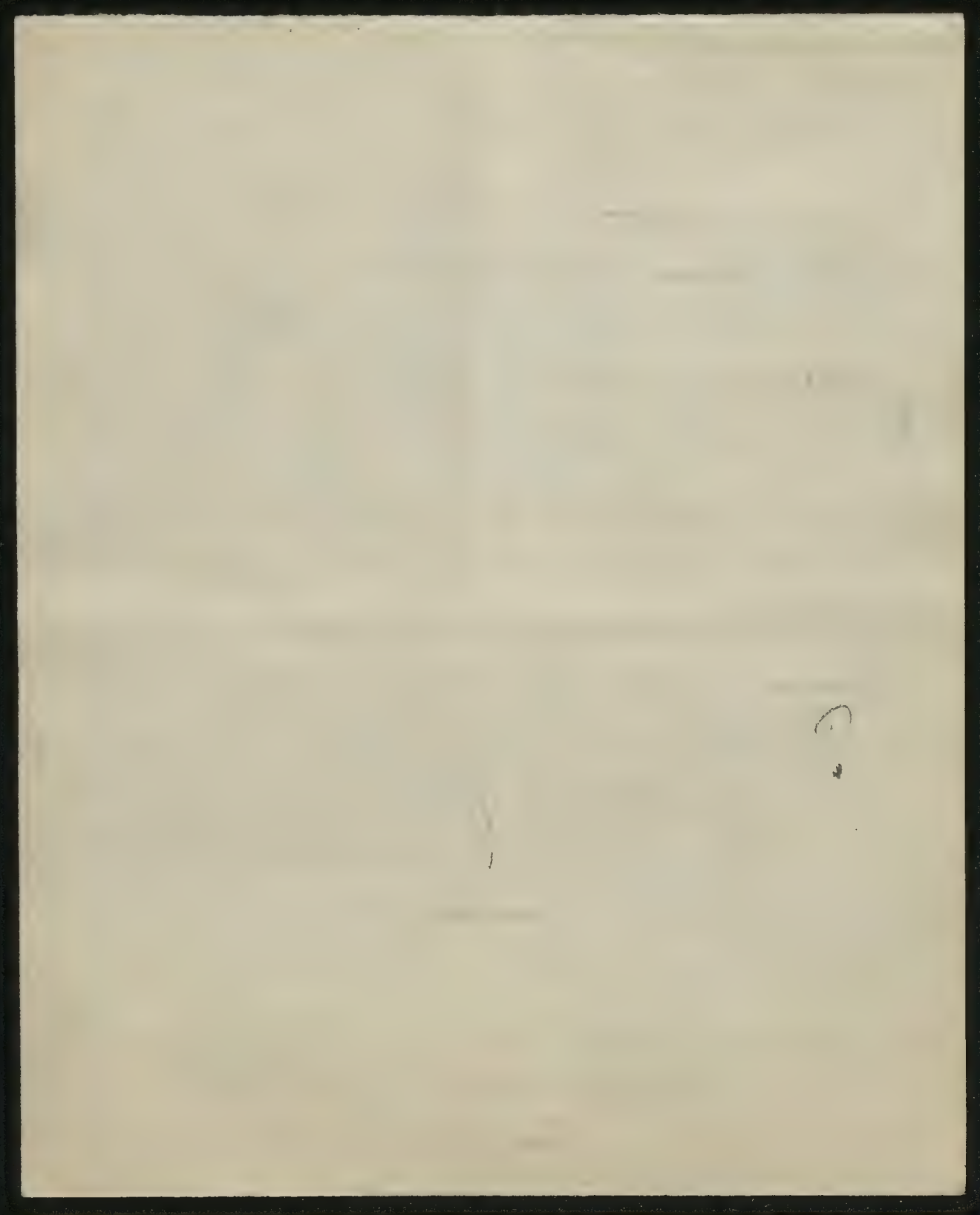
$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{\mu a^2}{4k} \left[ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1^2} \log \frac{r_1}{r_2} \right] \quad \text{--- (35)}$$

ou approximativement, pour une petite ~~épaisseur~~ épaisseur  $r_1 - r_2$  :

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\mu}{k} (anr_1)^2 \quad \text{indépendamment de l'épaisseur,} \quad \text{--- (36)}$$

ce qui donne par ex. pour  $n=100$ ,  $r_1=10$  cm, dans l'air :  $\theta_1 = \theta_0 + 14^\circ$

§ 23. En <sup>supposant</sup> ~~mettant~~  $r=\infty$  dans l'exemple précédent, on bien en supposant  $u=v=0$ ;  $v=f(x)$ ; on aura un flux lamellaire, stationnaire, qui est identique ~~avec~~ celui qui se produit dans des





circonstances analogues dans les liquides:  $v = bx + c$

(Mais au sein des liquides, ~~car~~ <sup>aussi</sup> un mouvement variable lamellaire est possible: lorsque le plan OYZ exerce des oscillations dans la direction des Y:  $v_0 = A \cos pt$

(Ce mouvement se propage dans la direction des X en vertu de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{de la même manière que la chaleur dans un corps}$$

$$\text{chauffé: } v = A e^{-x \sqrt{\frac{\rho c}{2\mu}}} \cos \left( pt - x \sqrt{\frac{\rho c}{2\mu}} \right) \quad \text{--- (37)}$$

Dans les gaz, au contraire, il y a cette singularité que les équations (10, 11, 12) ne peuvent pas être satisfaites par ~~la~~ <sup>l'hypothèse</sup> ~~supposition~~  $u = v = 0$ ;  $v = f(x, t)$ ; puisque la chaleur produite par <sup>le</sup> frottement donnera naissance à des vitesses dans la direction des X.

Il est facile d'en faire l'évaluation approximative.

Voilà un exemple intéressant <sup>de la manière dont</sup> ~~comme~~ des vibrations transversales peuvent produire des ondulations longitudinales, sonores; ce sont les premières qui seront prédominantes dans la proximité de la paroi OYZ, les autres dans des distances plus grandes, puisque leur coefficient d'extinction sera plus petit.)

(L'effet d'une raréfaction du gaz <sup>sera</sup> d'augmenter l'extinction pour les ondes longitudinales et <sup>de</sup> la diminuer pour les ondes transversales.

I done

§ 24. Un autre exemple qui <sup>met en évidence</sup> ~~démontre~~ une différence des liquides et <sup>des</sup> ~~des~~ gaz, ~~est~~ le suivant : un courant stationnaire dans la direction  $X$ , dont la vitesse ne dépend que de la valeur de  $x$  ; les parois parfaitement polies ou <sup>à</sup> une telle distance, qu'on peut négliger leur distance.

~~C'est-à-dire qu'on aura les équations :~~  
<sup>En négligeant la condition</sup>

$$\rho u \frac{du}{dx} = \frac{dp}{dx} + \frac{4\mu}{3} \frac{d^2u}{dx^2} ;$$

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0$$

$$u \frac{dp}{dx} + k p \frac{du}{dx} = (k-1) \frac{4\mu}{3} \left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (38)$$

que, dans ce cas, on a)  
 Ce qui est intéressant ~~aussi~~, c'est qu'on a ~~une~~ solution exacte, ~~dans~~  
~~ce cas~~, tandis que dans l'Hydrodynamique, on ne connaît pas de solution exacte des équations complètes, <sup>dans</sup> sauf quelques cas très simples ~~très simples~~ comme le précédent. Un mouvement analogue stationnaire ~~serait~~ d'un liquide serait impossible, puisqu'il n'y aurait pas des forces d'expansion visqueuse qui pourraient s'opposer à l'accélération produite par les différences de pression.

Les équations (38,2) et (38,1) peuvent être intégrées immédiatement.

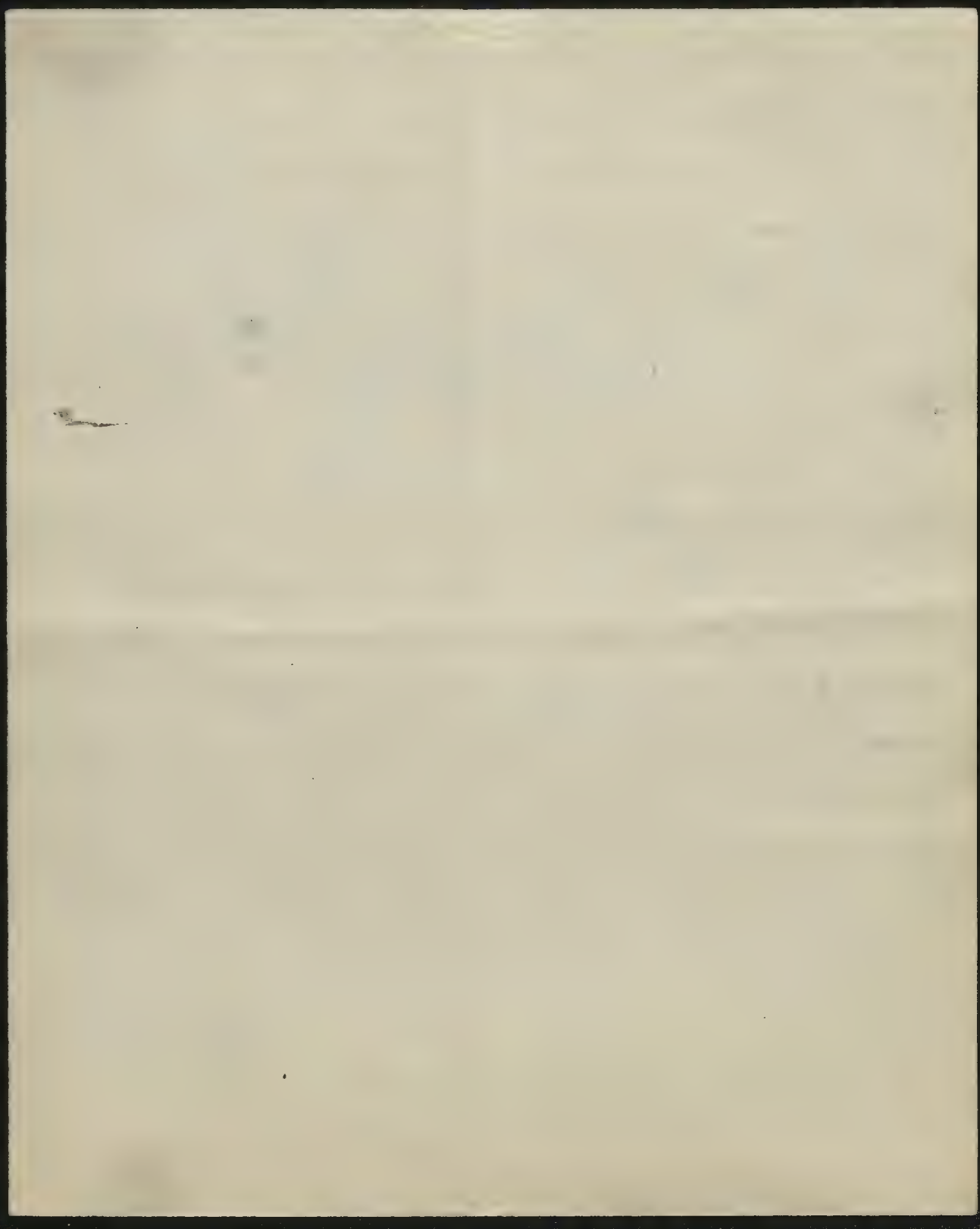
$$\rho u = b \quad \text{---} \text{---} \text{---} \quad (39,2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4\mu} (bu + p - a) \quad \text{---} \text{---} \text{---} \quad (39,1)$$

De même (38,3) après avoir été divisée par  $\frac{du}{dx}$ , dont la valeur est donnée par l'équation précédente :

$$p = \frac{(k-1)}{2} bu - \frac{c}{u} - (k-1)a \quad \text{---} \text{---} \text{---} \quad (39,3)$$





La substitution de cette valeur dans (39,1) et l'intégration donne:

$$x = m + \frac{4\mu}{3} \int \frac{u \, du}{(k+1) \frac{1}{2} u^2 - ka u - c} \quad \dots \dots \dots (40)$$

où l'intégrale peut être ~~diroptée~~ évaluée par des fonctions cyclo-  
métriques ou logarithmiques.

Le problème est résolu - mais, <sup>qu'il possède des</sup> ~~il y a~~ applications <sup>dans la</sup> ~~et pratique,~~  
~~il paraît assez douteux, <sup>car</sup> qui nulle en elle-même, just le nombre quatre~~ Nous avons trouvé ici  
~~des~~ constantes arbitraires, <sup>alors</sup> pendant que nous sommes ~~accoutumés~~ habitués

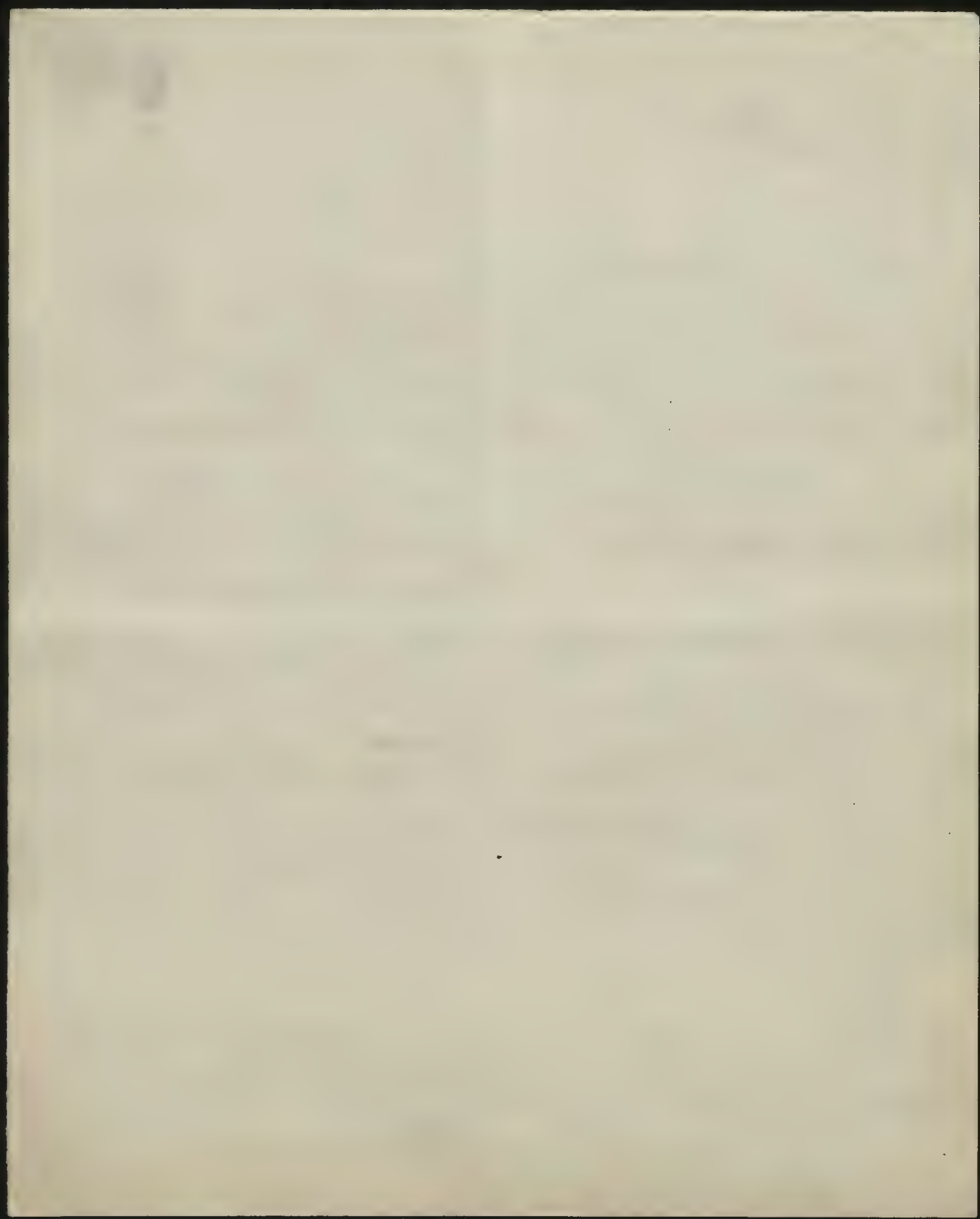
<sup>à</sup> définir le flux <sup>p. ex. dans les</sup> ~~par des~~ tubes de Poiseuille, par trois données:

la pression <sup>ou</sup> ~~à~~ deux points et la température du gaz. Mais <sup>comme</sup> nous  
verrons plus loin, <sup>il n'y a la</sup> ~~et que~~ <sup>simplicité</sup> ~~qu'une singularité~~ <sup>apparente</sup> de la loi de Poiseuille,  
qui est causée par l'omission des facteurs secondaires, notamment  
l'influence <sup>de l'état</sup> ~~du~~ mouvement dans la proximité des <sup>extrémités</sup> ~~bornes~~ du tube.

Un exemple <sup>il serait plus facile de</sup> ~~qui~~ <sup>de</sup> ~~serait~~ <sup>préciser</sup>  
§ 25. ~~Un mouvement qui pourrait être résolu plus facilement~~

c'est le mouvement variable défini par les conditions:  $v = w = 0$ ;  
 $u = f(x, t)$ ; mais ce problème ne pourrait être résolu dans toute  
sa généralité.

Nous supposons donc que le gaz, à pression initiale  $p_0$  et  
température  $\theta_0$  soit contenu dans un vaisseau cylindrique, à  
parois polies, fermé d'un côté, de l'autre côté admettant un  
piston, à masse négligeable, qui y soit enfoncé par une force





constante  $a$ ; ~~pour simplifier~~ <sup>(aussi)</sup> ~~pas cause de simplification~~ (nous négligeons) l'effet de l'inertie du gaz, <sup>en</sup> supposant un mouvement instantané analogue dans toute son étendue:  $u = \alpha f(t)$  ..... (41)

Or, la force extérieure  $a$  doit être balancée par la somme de la pression intérieure du gaz et par le frottement intérieur,

c'est-à-dire, (d'après (1))  $p_{xx} = a = p - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}$  ..... (42)

L'introduction de  $\frac{\partial u}{\partial x} = f(t)$  et la substitution de  $p$  dans l'équation thermique:  $\frac{dp}{dt} + k p \frac{\partial u}{\partial x} = (k-1) \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$

donne l'équation:  $\frac{df}{dt} + \frac{3ak}{4\mu} f + f^2 = 0$  ..... (43)

On en déduit par intégration:

$$\frac{1}{f} = A e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha} \frac{7}{f}; \quad \text{où: } \alpha = \frac{3ak}{4\mu}$$
 ..... (44)

et, en introduisant la valeur initiale  $\frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = p_0 - a$ , on

obtient:

$$u = \frac{\alpha \alpha}{\left(\frac{ak}{p_0 - a} + 1\right) e^{\alpha t} - 1}$$
 ..... (45)

Pour trouver la densité, intégrons l'équation de continuité:  $\frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,

ce qui donne:  $p = p_0 e^{-\int f dt}$  ..... (46)

où l'intégrale peut être développée de la manière suivante:

$$\int \frac{dt}{A e^{\alpha t} - B} = \frac{1}{\alpha B} \log \left( \frac{A e^{\alpha t} - B}{A e^{\alpha t}} \right)$$

F qui tendront à s'évanouir

Q.

C'est-à-dire :

$$p = p_0 \left[ 1 + \frac{p_0 - a}{a k} (1 - e^{-a t}) \right]^{-1} \quad \text{--- (47)}$$

La densité, la pression et la température s'approcheront, par conséquent, d'une manière asymptotique ~~à la~~ <sup>aux</sup> ~~des~~ <sup>des</sup> limites :

$$p_{\infty} = \frac{p_0}{1 + \frac{p_0 - a}{a k}} ; \quad p_{\infty} = a ; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{--- (48)}$$

~~et~~

$$\theta_{\infty} = \frac{p_{\infty}}{R p_0} = \frac{a \left( 1 + \frac{p_0 - a}{a k} \right)}{R p_0} = \theta_0 \left[ \frac{1}{k} + \frac{a}{p_0} \frac{k-1}{k} \right]$$

Ce qu'il y a d'intéressant dans cet exemple, c'est la comparaison avec la formule adiabatique ordinaire, qui donnerait :

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{a}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}} ; \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \left( \frac{a}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} ;$$

Les valeurs qui en résultent pour l'élévation de la température finale, sont inférieures à celles de notre calcul (48), ce qui est ~~le~~ naturel, puisque la formule adiabatique n'est applicable qu'au cas d'une expansion infiniment lente et ne tient pas compte du frottement intérieur.

Il est vrai que nous aussi, <sup>nous</sup> avons négligé un facteur : l'effet de l'inertie du gaz, qui ~~tend~~ <sup>diminuera</sup> cette différence et ~~il~~ produira des oscillations vanfossantes ~~et par conséquent~~ <sup>et par conséquent</sup> ~~notre calcul~~ ne serait ~~pas~~ exact que pour un gaz très raréfié. Cependant, cet exemple prouve qu'une erreur — très petite peut être — est inévitable //

qui tendront à s'évanouir



9

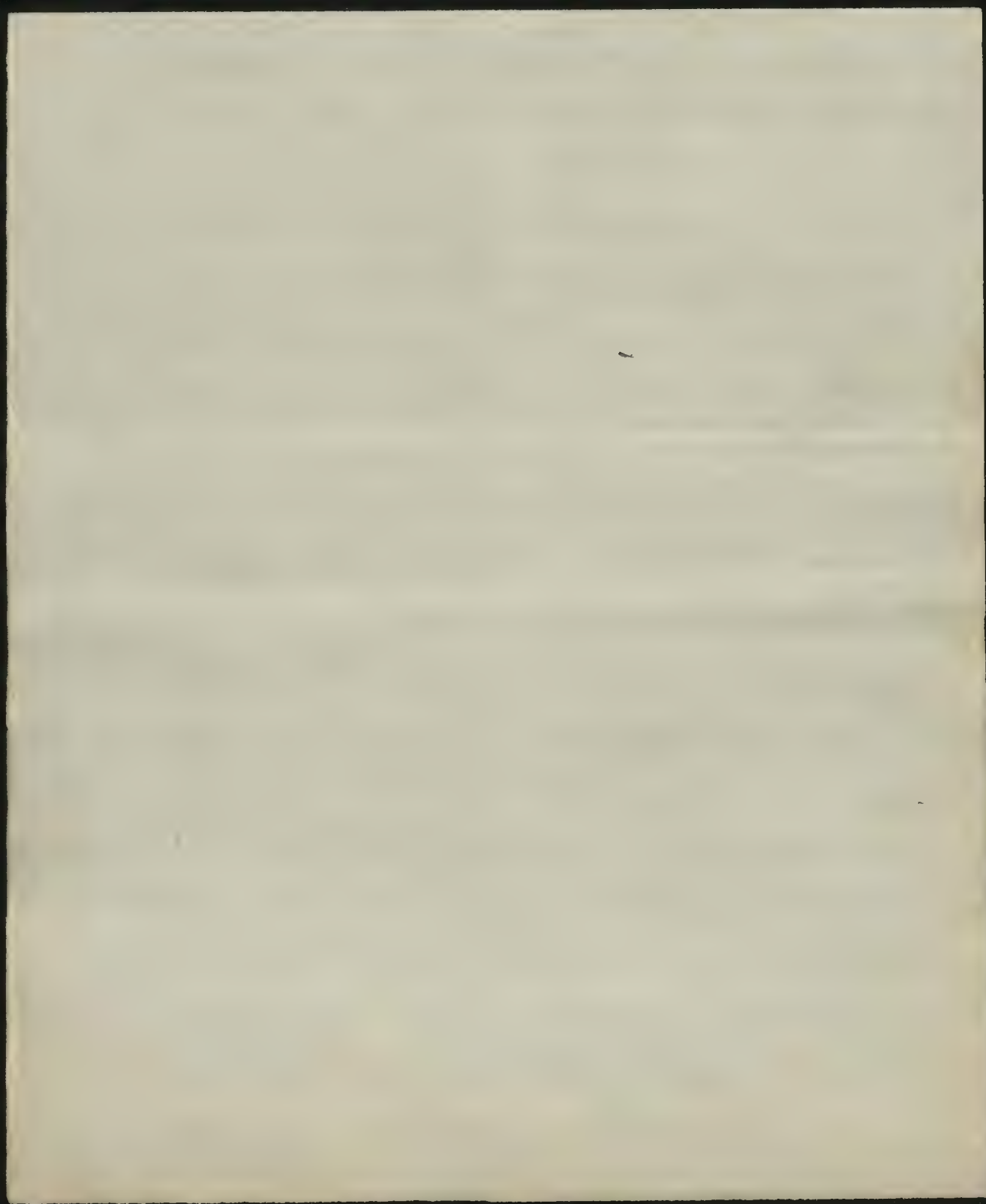
si l'on emploie la formule adiabatique ~~donc~~ à l'évaluation des mesures de la chaleur spécifique des gaz faites d'après la méthode de Clément - Desormes.

(Leur effet sera une augmentation apparente du coefficient  $k$ , le contraire de l'effet de la conductibilité. D'ailleurs, il dépendra de la manière dont se produit la compression; si le ~~réservoir~~ <sup>réservoir</sup> avait, par exemple, une forme sphérique, à parois dilatables, la diminution des longueurs serait la même dans toutes les directions:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \text{const.}$  et, par conséquent,  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$ , c'est-à-dire que la viscosité n'aurait ~~aucun~~ <sup>aucun</sup> d'effet ~~de tout, soit~~ ni effet mécanique, ni thermique, (puisque  $\Phi = 0$ ).

§ 26. Le système des équations aérodynamiques est si compliqué, qu'on ne peut espérer de le résoudre directement que dans des exemples d'une ~~faible~~ <sup>faible</sup> simplicité exceptionnelle, tels que ceux que nous <sup>venons de citer.</sup>

~~Autrement~~, on peut employer, outre les méthodes du § 7 - § 13, la méthode d'approximations successives. En voici des cas particuliers.

Si le coefficient  $\kappa$  de conductibilité thermique était infini, on aurait un mouvement rigoureusement isothermique. La même chose s'applique approximativement à tous les cas où la conductibilité joue un rôle prépondérant comme aux mouvements "calmes"





dans des ~~vaisseaux~~ vaisseaux étroits; à mesure que  $\frac{1}{k}$  diffère de la valeur  $\neq$  zéro, la distribution de chaleur et de mouvement s'écartera de l'état limite, ~~de sorte~~ <sup>de sorte</sup> qu'on pourra développer toutes les variables en séries potentielles de la forme

$$u = u_0 + \frac{u_1}{k} + \frac{u_2}{k^2} + \frac{u_3}{k^3} + \dots \quad (49)$$

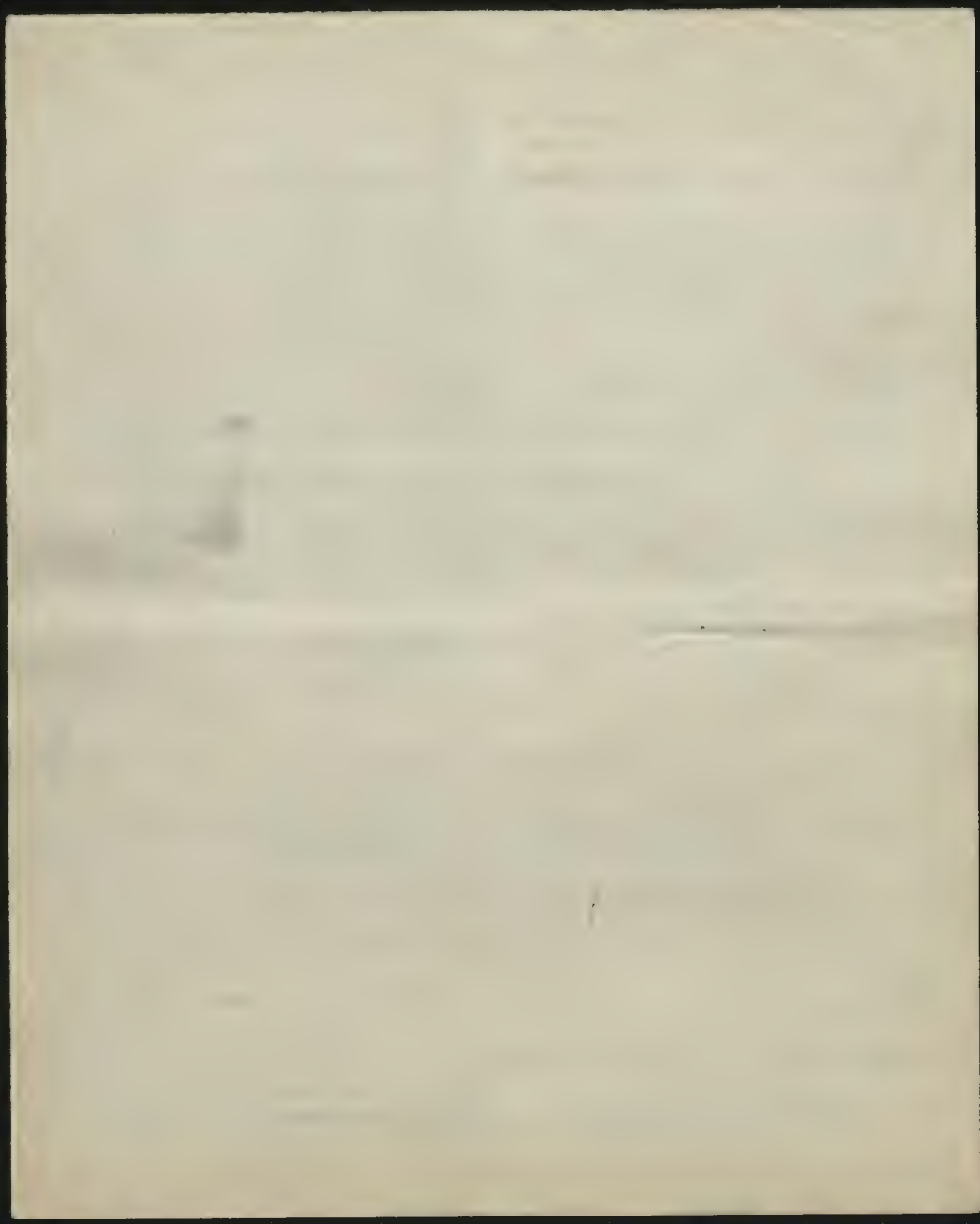
En décomposant les équations (10, 11, 12) <sup>après avoir substitué ces expressions, d'après les degrés de  $(\frac{1}{k})$ , on aura une série d'équations à approximations progressives, dont les trois premiers représentent l'état le plus simple: isothermique:</sup>

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \text{const} = \frac{\mu_0}{R p_0} \\ \frac{\partial \mu_0}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_0 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}_0}{\partial x} \text{ etc.} \\ \frac{\partial(\rho_0 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w_0)}{\partial z} &= 0 \\ (k-1) \Delta^2 \theta_1 &= u_0 \frac{\partial \mu_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \mu_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \mu_0}{\partial z} + k \text{div}_0 - (k-1) \Phi_0 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \text{div}_1}{\partial x} \text{ etc.} \\ \frac{\partial(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w_1 + \rho_1 w_0)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{le plus simple: isothermique:} \quad (50)$$

§27. Essayons d'appliquer cette méthode d'approximation à la théorie ordinaire <sup>\*)</sup> du mouvement dans les tubes Poiseuille. Le raisonnement usuel correspond aux équations (50) simplifiées encore par <sup>l'hypothèse</sup> ~~la sup-~~ position  $v=w=0$  et par l'omission des termes  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  etc.

Pour obtenir une approximation plus grande, <sup>il faut</sup> ~~on devrait~~ substituer

\*) O.E. Meyer Degg. Ann. 127 p. 253, 353 (1866); 148 p. 1 (1872).



les formules qui en résultent, c'est-à-dire :

$$p = \sqrt{p_1^2 - \frac{x}{l} (p_1^2 - p_2^2)} = \sqrt{a - cx} \quad (52)$$

$$u = \frac{\delta^2 - r^2}{8\mu} \frac{c}{\sqrt{a - cx}} \quad (53)$$

dans l'équation (51), qui se transforme dans

$$\Delta^2 \theta_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) = \frac{c^2}{16\mu} \frac{\delta^2 - 2r^2}{a - cx} \quad (54)$$

L'intégration donne :

$$\theta_1 = - \frac{c^2}{128\mu} \frac{(\delta^2 - r^2)^2}{a - cx} = - \frac{1}{128\mu} \left[ \frac{(\delta^2 - r^2) (p_1^2 - p_2^2)}{lp} \right]^2 = - \frac{u^2 \mu}{2} \quad (55)$$

Nous aurons donc :  $\theta = \theta_0 - \frac{\mu}{2k} u^2$

et, ce qui est <sup>remarquable</sup> ~~curieux~~,  $\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$ , c'est-à-dire que le gaz n'échange pas de chaleur avec les parois du tube.

L'abaissement <sup>um</sup> maximal, dans l'axe du tube, s'élève à

$$\Delta \theta = \frac{9\delta^4}{16 \cdot 128 \cdot k \mu} \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{lp} \right]^2. \text{ La valeur serait, par exemple, pour } (56)$$

$$p_1 = 1 \text{ atm.}, p_2 = \frac{1}{2} \text{ atm.}, \delta = 0.1 \text{ mm.}, l = 10 \text{ cm.} : \Delta \theta = 0.6^\circ - 2.4^\circ$$

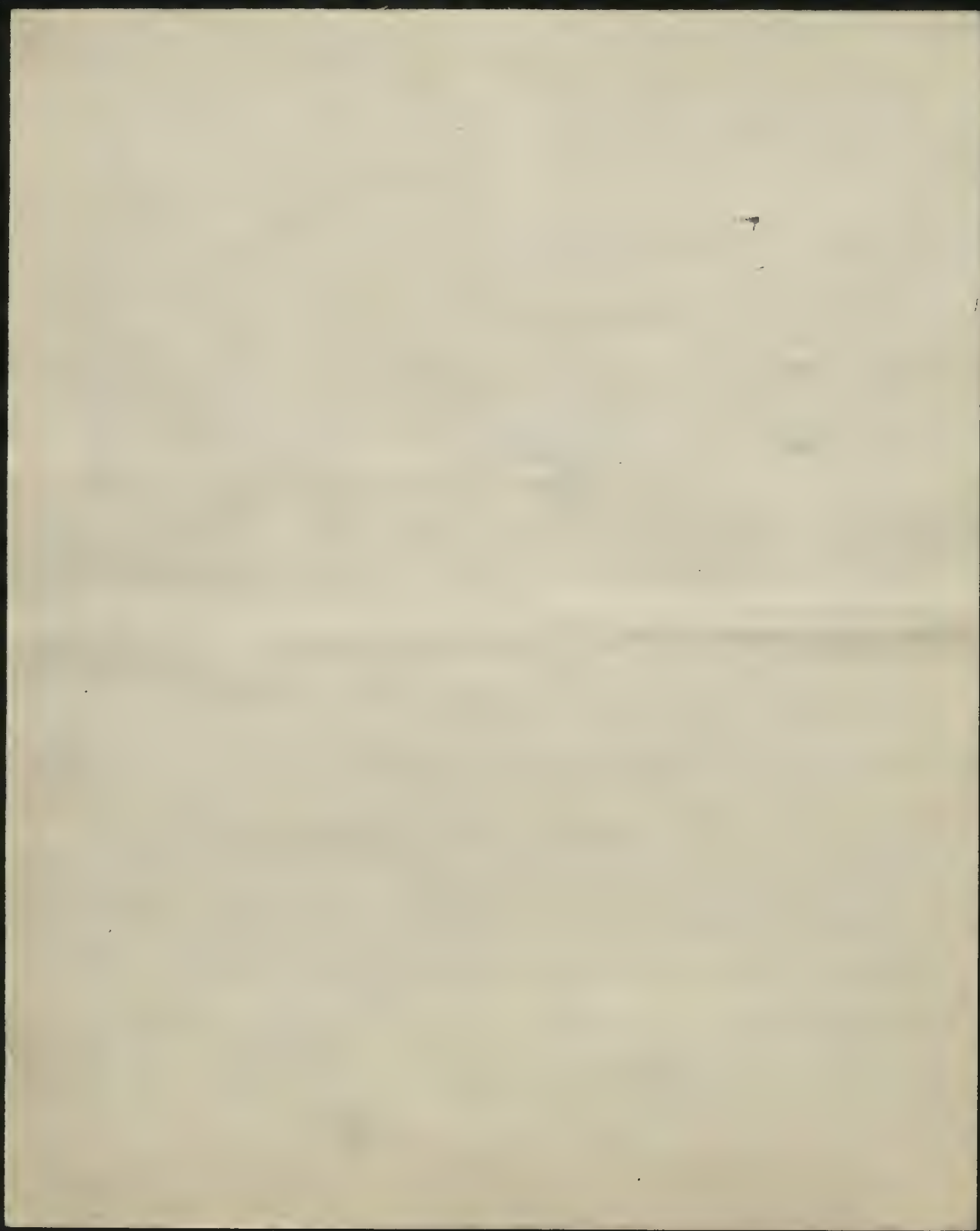
Ainsi on trouve pour les expériences de Koch \*) sur la viscosité de la vapeur de mercure, ~~par~~ avec les nombres approximatifs :

$$p_1 = 100 \text{ cm.}, p_2 = 1 \text{ cm.}, l = 10 \text{ cm.}, r = 0.00425 \text{ cm.}$$

un abaissement sur l'axe de  $0.04^\circ$  jusqu'à  $400^\circ \text{C.}$

\*) Wiedem. Ann. 19 p. 957 (1883)





Ce résultat ne sera pas exact, sans doute, mais il suffit pour démontrer que la formule de Poiseuille, fondée sur la <sup>hypothèse</sup> ~~supposition~~ d'un mouvement lent et isothermique, n'est pas applicable dans un cas pareil et que le ~~coefficient~~ <sup>final</sup> résultat de ce travail — proportionnalité de  $\mu$  avec  $\theta^{1.6}$  — est dénué de fondement. Des objections <sup>de même nature</sup> ~~pareilles~~ s'attachent aux travaux de L. Meyer et Stendel <sup>(loc. cit.)</sup> et même à quelques unes des mesures de O.E. Meyer, quoique l'influence sur les nombres définitifs de celles-ci ne soit pas importante probablement.

Elles font apprécier l'importance des conditions : petitesse du diamètre et de la différence des pressions et longueur du tube.

La formule (56) d'ailleurs ne servira qu'à la vérification de la <sup>supposition</sup> ~~condition~~ d'isothermie. On ne saurait pas ~~justifié de en droit~~ <sup>de pousser plus loin</sup> ~~monter~~ le calcul d'approximation ~~plus loin~~, à cause de l'inexactitude de la formule primaire, <sup>(52, 53)</sup> ~~et des valeurs~~ qui provient des simplifications mentionnées. <sup>\*\*\*)</sup>

D'autre part, si l'on voulait exécuter le calcul en tenant compte de ces effets secondaires, — de la viscosité, de volume <sup>et</sup> de l'inégalité de pression dans les différentes couches d'un profil, ~~on~~ — on rencontrerait un autre obstacle : la connaissance de la pression <sup>en</sup> ~~dans~~ deux points

\*) Wiedem Ann. 16 p. 368, 394 (1882)

\*\*) Il y faut ajouter l'omission des termes d'inertie  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$  etc.

9  
1



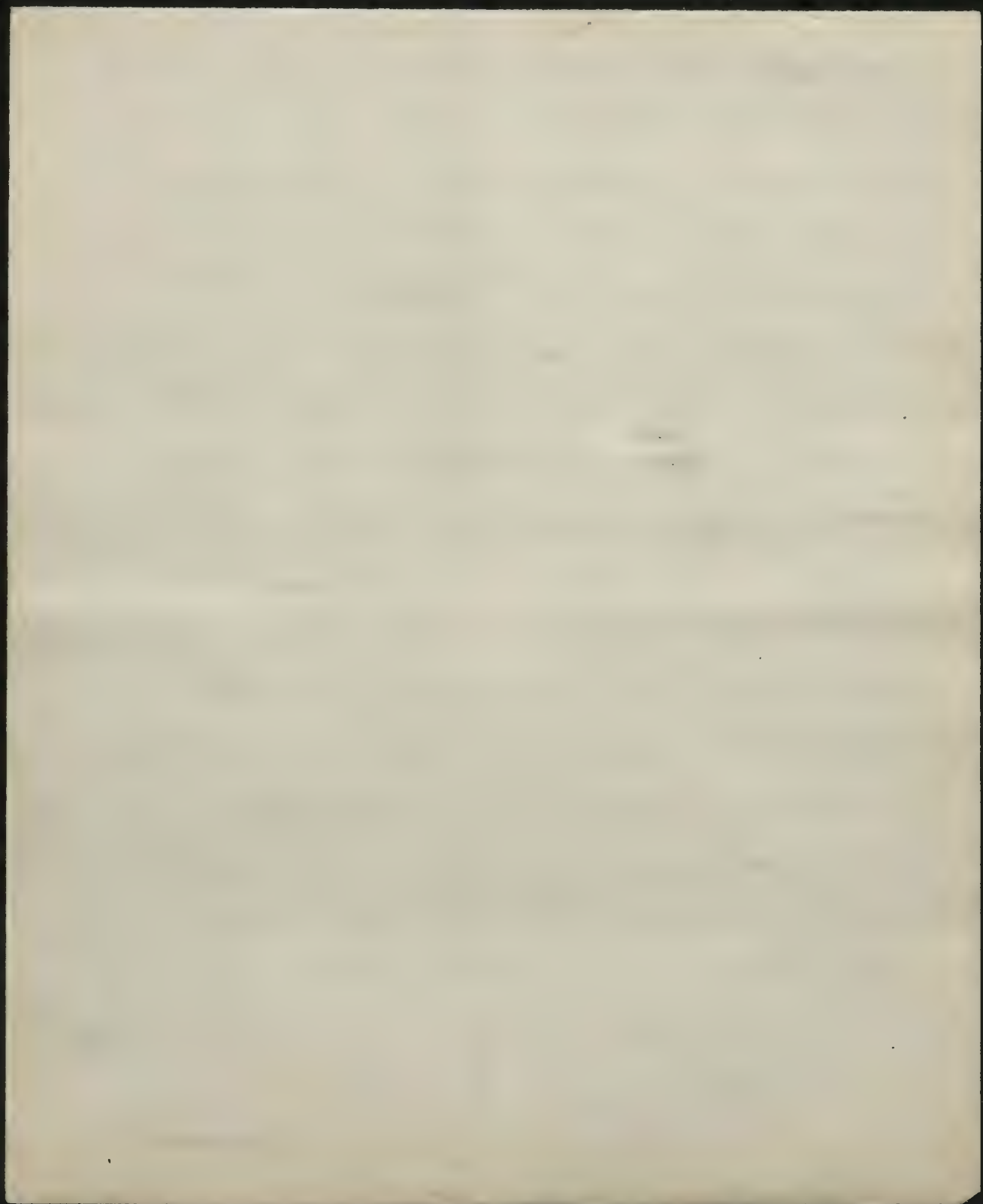
de l'axe,  $p_1$ ,  $p_2$  et de la température initiale ne suffirait pas à la détermination des constantes et des fonctions arbitraires du calcul; il faudrait <sup>connaître encore</sup> ~~savoir~~ la distribution détaillée de <sup>la</sup> vitesse et de <sup>la</sup> pression dans le profil initial.

(<sup>belle</sup> ~~ça~~ veut dire que le problème n'est pas défini d'une façon exacte, si l'on n'a pas précisé la forme des deux réservoirs, qui communiquent par le tube, surtout dans la proximité de ses bouts. L'effet de ces circonstances, qui se manifeste <sup>par exemple</sup> ~~seulement~~ dans les phénomènes de ~~en connexion avec~~ la "vena contracta", peut modifier d'une manière considérable <sup>la transpiration</sup> l'afflux (par des tubes larges, de petite ~~longueur~~ <sup>longueur</sup>).

Cependant la méthode de Poiseuille, employée de la <sup>manière</sup> ~~façon~~ décrite au § 13, peut servir toujours à des mesures exactes de la viscosité relative.

§ 28. Une autre catégorie de problèmes <sup>peut être</sup> ~~est~~ illustrée par l'exemple suivant. Supposons une sphère, en repos, dans un gaz animé d'un mouvement <sup>(stationnaire)</sup> "calme", <sup>avec une</sup> ~~à~~ vitesse <sup>uniforme</sup>  $c$  à l'infini; cette <sup>hypothèse</sup> ~~supposition~~, qui implique l'omission des termes en  $\frac{\partial u}{\partial x}$  en comparaison avec  $\mu \Delta^2 u$ , exige que  $\frac{\rho c a}{\mu}$  soit une quantité petite.

La solution serait très simple, si <sup>(le gaz était comprimé à une)</sup> ~~la~~ densité infinie, parce que dans ce cas dir serait égal à zéro (d'après (11)) et le mouvement



serait celui d'un liquide incompressible. Pour trouver les corrections, qui résultent de la compressibilité, considérons que la distribution de la densité et aussi des autres variables dépendra de la valeur constante de la ~~densité~~<sup>pression</sup> à l'infini, que nous appellerons  $P$ .

A mesure que  $\frac{1}{P}$  s'éloigne de ~~la valeur~~ zéro, le mouvement s'écartera du type incompressible. Donc, on pourrait développer toutes les variables en séries d'après les degrés de  $\frac{1}{P}$ , d'une façon ~~semblable~~<sup>ou</sup> comme dans § 26, ce qui permettrait de décomposer les équations (10, 11, 12) ~~dans~~<sup>en</sup> un système d'équations à approximations progressives. ~~Par cause de simplicité nous nous bornons à la~~<sup>Pour simplifier</sup> considération de deux termes, en supposant que toutes les variables ~~soient~~<sup>soient</sup> composées de la manière suivante:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1; & v &= v_0 + v_1; & w &= w_0 + w_1; \\ p &= p_0 + p_1; & \rho &= \rho_0 + \rho_1; & \theta &= \theta_0 + \theta_1; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (57)$$

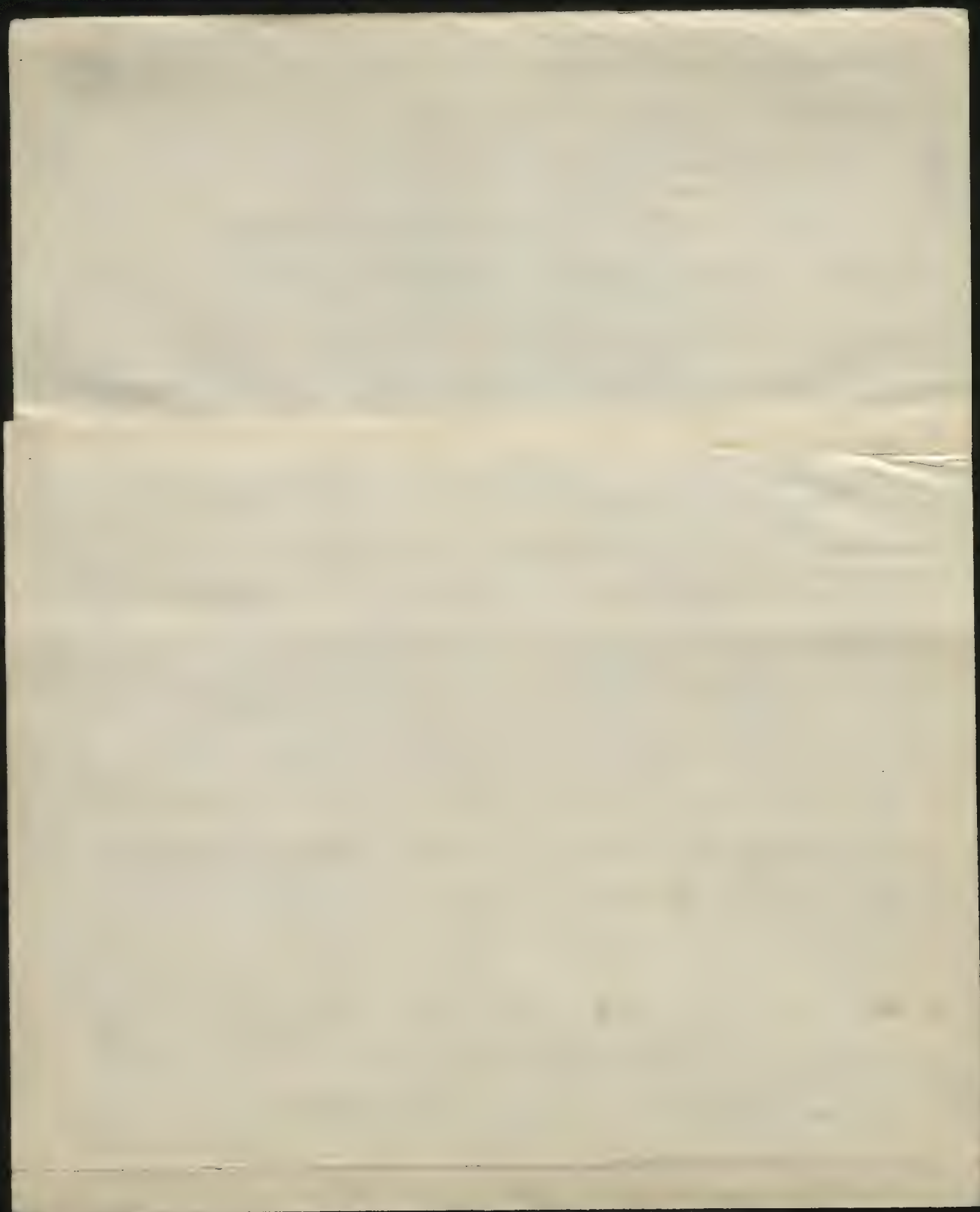
où les termes premiers représentent le type limite d'incompressibilité, les termes seconds les corrections à y ajouter, petites en comparaison avec ~~les~~ ceux-là. L'équation (9) donne:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{p_0} &= R \theta_0; & \frac{p_1}{p_0} &= \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\theta_1}{\theta_0}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

~~et~~ Puisque nous supposons que les  $\theta$  variations de <sup>la</sup> pression, définies par  $\frac{\partial p_0}{\partial x}$  etc. soient petites par rapport à  $p_0$  etc., on pourra déduire de l'équation (11) comme approximation première:

$$\left. \begin{aligned} \text{div}_0 &= 0 \\ \text{appr. seconde: } p_0 \text{ div}_1 + u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$





De l'équation (12):

$$u_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + k \rho_0 \operatorname{div}_1 = (k-1) [\Phi_0 + \kappa \Delta^2 \theta_0] \quad \dots \dots \dots (60)$$

qui se transforme, en égar à (59,2) et (58,1) dans en:

$$u_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \cancel{k \rho_0 \operatorname{div}_1} \Phi_0 = \frac{k}{k-1} R \rho_0 \left[ u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right] = -\kappa \Delta^2 \theta_0 \quad \dots (61)$$

De l'équation (10) enfin:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_0 ; & \frac{\partial \rho_0}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div}_1 ; \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial y} &= \mu \Delta^2 v_0 ; & \frac{\partial \rho_0}{\partial y} &= \mu \Delta^2 v_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div}_1 ; \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= \mu \Delta^2 w_0 ; & \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= \mu \Delta^2 w_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div}_1 ; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (62)$$

L'approximation première est représentée par le système (62,1) qui détermine, ~~ensemble avec~~ avec (59,1), le problème analogue de l'hydrodynamique, dont la solution voici:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\frac{3}{4} c a \left( 1 - \frac{a^2}{n^2} \right) \frac{x^2}{n^3} + c \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{n} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{n^3} \right) \\ v_0 &= -\frac{3}{4} c a \left( 1 - \frac{a^2}{n^2} \right) \frac{xy}{n^3} \\ w_0 &= -\frac{3}{4} c a \left( 1 - \frac{a^2}{n^2} \right) \frac{xz}{n^3} \\ \rho_0 &= P - \frac{3\mu}{2} c a \frac{x}{n^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (63)$$

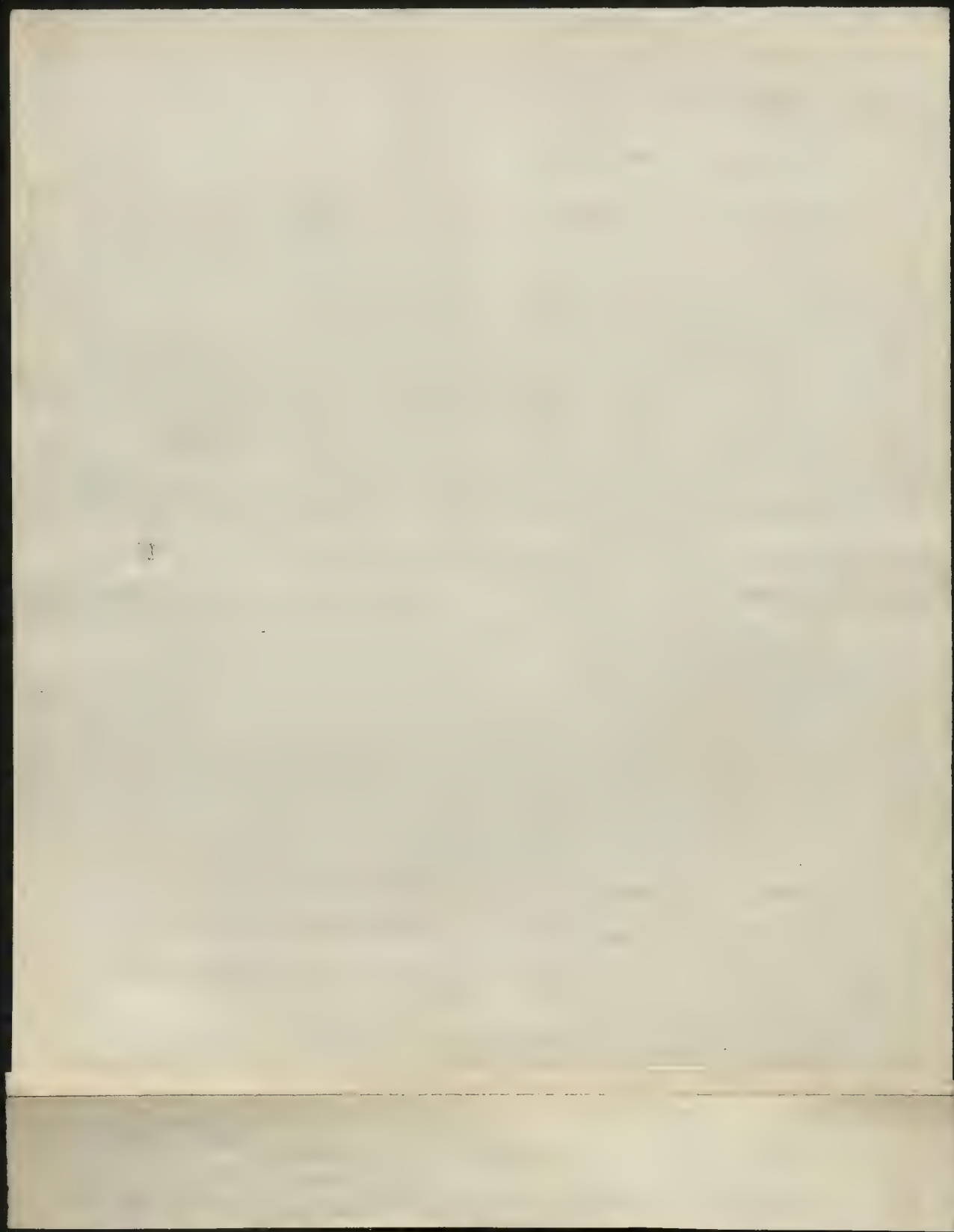
Nous en ferons usage pour évaluer les variations de la température d'après (61). Le 1<sup>er</sup> côté gauche de cette équation aura la valeur:

$$u_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\frac{3}{2} \mu \frac{c a}{n^3} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{n} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{n^3} \right) + \frac{9}{2} \mu \frac{c^2 a^2}{n^5} \left( 1 - \frac{5}{4} \frac{a}{n} + \frac{1}{4} \frac{a^3}{n^3} \right) \dots (64)$$

$$\Phi_0 = \frac{9}{4} \mu \frac{c^2 a^2}{n^5} \left( 3 \frac{x^2}{n^2} + \frac{a^2}{n^2} - 6 \frac{a^2 x^2}{n^4} + 2 \frac{a^4 x^2}{n^6} \right) \dots \dots (65)$$

ce qui démontre que la chaleur provenant de la compression et du frottement intérieur sont des grandeurs du même ordre.

Les équations de la forme (61) - appartenant au type "elliptique" -





$$\Delta^2 \vartheta + u_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + v_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + w_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = F$$

qui se rencontrent souvent dans des problèmes <sup>semblables</sup> ~~parités~~, sont peu <sup>élucidées</sup> expliquées jusqu'à présent. Elles peuvent être intégrées par la ~~faute~~ méthode laborieuse d'approximation successive, en résolvant les équations  $\Delta^2 \vartheta' = F$

$$\Delta^2 \vartheta'' = F - (u_0 \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} + v_0 \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial y^2} + w_0 \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial z^2})$$

et en, tenant compte de ~~en regard~~ la condition de surface  ~~$\vartheta = 0$~~   $\vartheta = \Theta$ .

On peut se restreindre à l'approximation première, lorsque le coefficient  $\frac{caR}{\kappa} \rho_0$  qui détermine la convergence de la série, est petit — condition qui ne diffère pas beaucoup, ~~sur~~ au point de ~~vue~~ quantité d' de la supposition antérieure d'un mouvement „calme”. Dans ce cas, on déduirait la valeur suivante de (61), qui définit l'écart de l'isothermie :

$$\theta_0 = \Theta + \frac{\kappa c^2}{32 \kappa} \left\{ \frac{a}{2} \left[ 19 + 13 \frac{a^2}{\kappa^2} + 24 \frac{x^2}{\kappa^2} - 39 \frac{x^2 a^2}{\kappa^4} \right] + \frac{3a^2}{\kappa^2} \left[ -9 + \frac{3x^2}{\kappa^2} - \frac{a^2}{\kappa^2} - \frac{2a^4}{3\kappa^4} + \frac{4a^2 x^2}{\kappa^4} - \frac{2a^4 x^2}{\kappa^6} \right] \right\} \dots (66)$$

En substituant cette valeur dans (58,1)(59,2), on déduit la correction <sub>=</sub> de la pression qui correspond à la compressibilité et à la variabilité de la température. Elle sera très petite d'ailleurs, en comparaison avec la pression de résistance  $p$ , lorsqu'on suppose un mouvement „calme.” <sup>\*)</sup>

(Zelle Journal 75 (1873))

\*) Voir un calcul <sup>analogue</sup> ~~par~~ approximation, sans considération de la variabilité de la température: O.E. Meyer

9

r

§ 29. Puisque la température s'élève, d'après cette formule, suivant  
l'abscisse de la normale à la surface en raison de

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\mu c^2}{32 K a} [20 + 111 \cos^2 \varphi] \quad \text{--- (67)}$$

une sphère solide, animée d'une vitesse  $c$  dans l'air tranquille  
 devrait s'échauffer de même; l'effet serait plus grand aux  
 "pôles", qu'à l'"équateur", sa valeur moyenne serait, d'après un  
 calcul approximatif, ~~donc~~  $\Delta \theta = \frac{57}{32} \frac{\mu c^2}{K} \quad \text{--- (68)}$

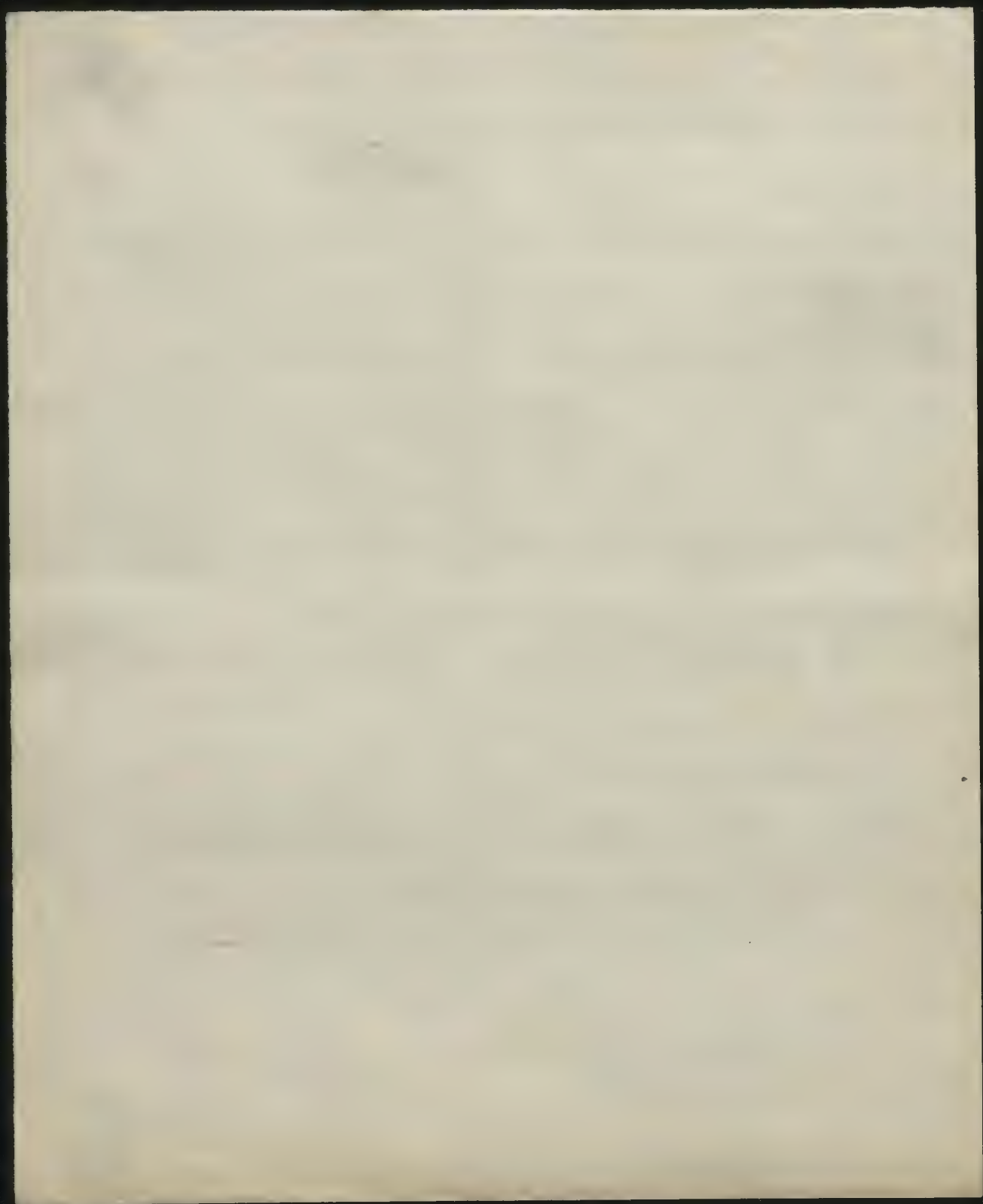
indépendant des dimensions de la sphère.

La considération des corrections suivantes dans la série  $\vartheta', \vartheta'', \vartheta'''$   
 changerait ce résultat de telle façon, que la distribution  
 deviendrait asymétrique, le réchauffement étant plus considérable  
 au pôle "postérieur" qu'à l'"antérieur".

Ce résultat, de même que l'excès comparatif de la température  
 à l'équateur est en accord avec les expériences de Joule et  
Kelvin \*) pour deux petites vitesses; et aussi la formule (68)  
 s'accorde <sup>avec</sup> leurs mesures pour des vitesses moyennes, ~~faute~~  
~~et~~ en ce qui concerne l'indépendance ~~de~~ l'élévation  
 des dimensions du corps et la proportionnalité au carré de la

\*) Voir § 12, 5.





vitesse, seulement le coefficient numérique est plus petit [ $1^\circ\text{C. pour } 28 \frac{m}{sec.}$ , tandis que  $1^\circ\text{C. pour } 55 \frac{m}{sec.}$  d'après Kelvin.]

Cependant, on aurait tort de considérer ~~cela~~<sup>ceci</sup> comme une confirmation de la théorie, puisque les conditions de ces expériences ~~entraînent~~<sup>dépassent</sup> de beaucoup les suppositions du calcul. Rappelons ~~c'est évident~~ que  $\rho c a$  doit être petit en comparaison avec  $\mu$  ( $= 0.00018$ ), afin que le mouvement soit "calme"; par conséquent des vitesses ~~possibles~~<sup>autres plus hautes</sup> (qui seraient admissibles que dans un gaz très raréfié) ~~employées par Kelvin~~.

§30. Nous voyons que l'importance pratique de pareils exemples est limitée assez sérieusement par la ~~supposition~~<sup>hypothèse</sup> du "calme".

— Un intérêt beaucoup plus considérable s'attacherait aux mouvements "violents" (voir §6), où ~~la compressibilité~~<sup>d'ailleurs</sup> et les phénomènes thermiques jouent un rôle beaucoup plus considérable.

~~Les~~ Les méthodes <sup>(approximatives)</sup> qui pourraient être appliquées à des phénomènes pareils, où l'omission des termes d'inertie ne serait plus justifiée, ~~sont~~ sont les suivantes :

1). En considérant que le mouvement d'un gaz plus léger [c'est-à-dire ayant un coefficient  $R$  plus grand] sera plus rapproché du type "calme", on peut développer toutes les variables en séries de  $\frac{1}{R}$ , ce qui





donne des corrections successives à ajouter aux formules du type limite, d'après un procédé semblable à celui des §26, 28.

2). Un développement pareil, d'après les degrés de  $\mu$ , définirait des corrections à faire dans les ~~expressions~~ résultats se rapportant au type limite du gaz idéal, à cause de la viscosité.

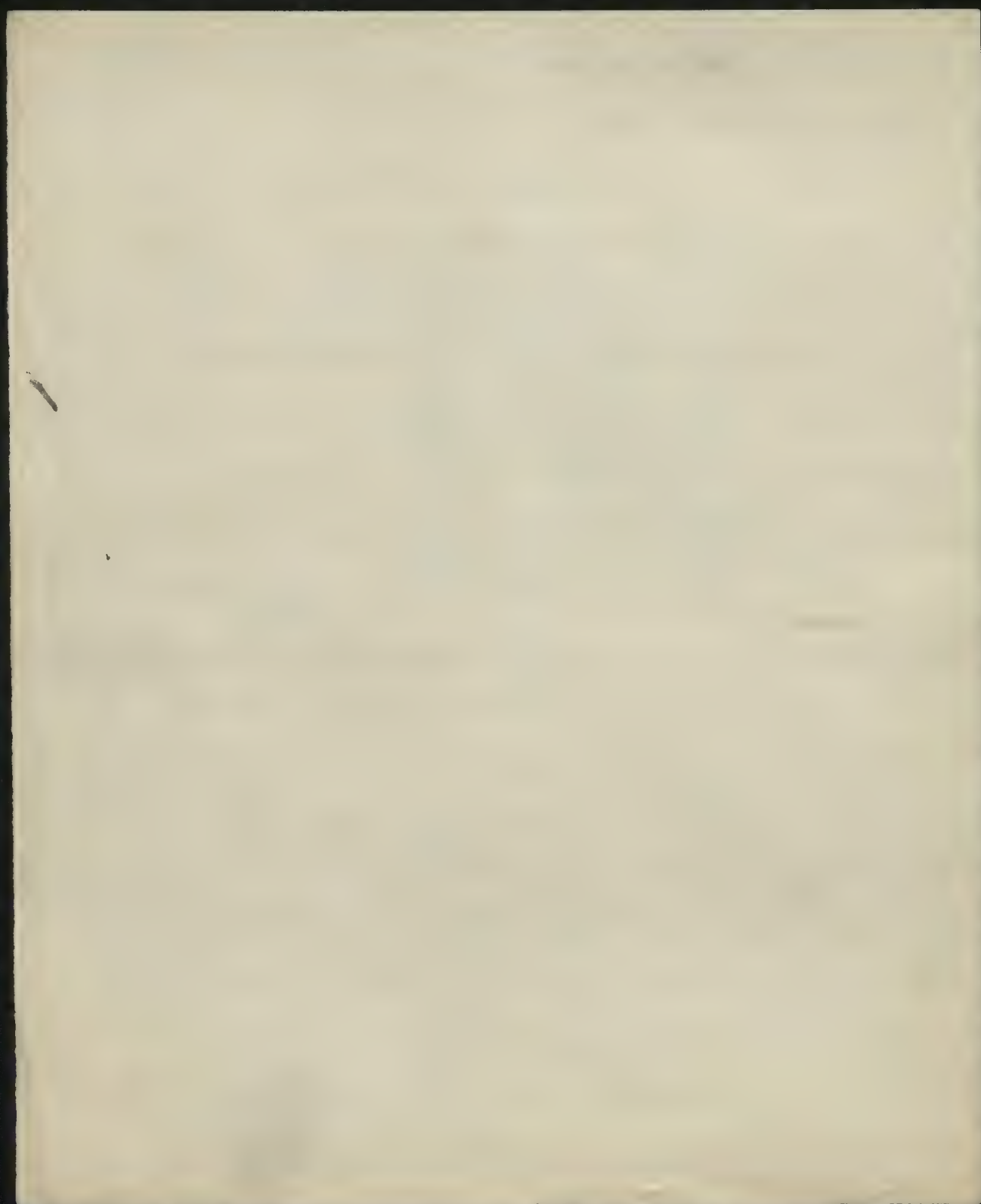
L'avantage de ces méthodes consiste dans la linéarité des équations résultantes, mais leur complication est ~~est~~ cependant plus considérable que dans les exemples précédents.

— En outre, lorsqu'une certaine limite d'inertie est ~~atteinte~~ <sup>dépassée</sup>, par suite <sup>de l'augmentation</sup> d'augmentation de vitesse ou de densité, l'état devient ~~labile~~ <sup>instable</sup>, et des mouvements "turbulents" prennent naissance.

Nous avons noté, dans les chapitres précédents, quelques cas semblables, ~~comme~~ comme les oscillations ~~fixes~~ <sup>fixes</sup> dans le jet d'un gaz, et les sons de friction, qui semblent être la cause primaire du son dans les instruments à ~~sans~~ vent.

— Il faudrait chercher d'autres méthodes pour le traitement de ces ~~telles~~ phénomènes, puis que les développements précédents supposent la continuité des fonctions.

(Mais nous ne nous occupons pas ici des problèmes des mouvements visqueux inerte, ~~en~~ considérant que dans un cas beaucoup plus



simple - dans l'hydrodynamique des liquides visqueux - les  
recherches analogues sont à peine abordées et, jusqu'à présent,  
n'ont fourni que des résultats très insuffisants.







